ELEKTRODINAMIKA

Voja Radovanović
Fizički fakultet
Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2020. godine

Sadržaj

Predgovor

Ovaj tekst je nastao na osnovu predavanja koja držim iz predmeta Elektrodinamika, odnosno Elektrodinamika 1 i 2 studentima teorijske i eksperimentalne fizike na Fizičkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu. Elektrodinamika sa teorijskom mehanikom, kvantnom mehanikom i statističkom fizikom spada u bazične kurseve u svakom studijskom programu fizike. Na ovim kursevima stiču se metodološka znanja neophodna za uspešno savladavanje drugih kurseva, kao što su: fizika čvrstog stanje, kvantna teorija polja, fizika plazme, fizika čestica, fizika atoma i molekula i druge. Drugim rečima, ovi kursevi su neka vrsta ulaznice u modernu fiziku.

Literatura iz elektrodinamike je dosta široka. Delimična lista je data u spisku literature, na kraju ove Knjige. Medjutim, knjige [1] i [2] su svakako najstandardniji udžbenici elektrodinamike na većini Univerziteta. Ja Vam toplo preporučujem da koristite ove dve knjige.

Sadržaj ove knjige je odredjen fondom časova predmeta Elektrodinamika 1 i 2 na Fizičkom fakultetu, ali i sadržajem drugih kurseva na našem Fakultetu. U prvoj glavi se uvodje osnovne veličine koje opisuju naelektrisanje i elektromagnetno polje u klasičnoj elektrodinamici. Druga glava započine sa rekapitulacijom elektrostatike i magnetostatike, a zatim se uvode Maksvelovim jednačinama koje opisuju elektromagnetno polje naelektrisanja u vakuumu. U poslednjem poglavlju se uvode potencijali elektromagnetnog polja. Naredno poglavlje posvećeno je jednačinama elektromagnetnog polja u sredinama. U četvrtom poglavlju pokazaćemo da elektromagnetno polje ima energiju, impuls i moment impulsa. Naredna glava je posvećena relativističkoj simetriji koju poseduje elektrodinamika. Relativistička simetrija elektrodinamike, zajedno sa njenom kalibracionom simetrijom uvedenom u drugoj glavi su osnova moderne fizike. U ovoj glavi Maksvelove jednačine se dobijaju Hamiltonovim varijacionim principom, koji je jedan od stubova teorijske fizike. Recimo samo da npr. Landau u knjizi [2] polazi od dejstva za elektromagnetno polje i iz njega izvodi Maksvelove jednačine. U glavama koje smo do sada nabrojali dati su opšti koncepti elektrodinamike. Naredne glave posvećene su rešavanju konkretnih elektrodinamičkih problema. One započinju sa statičkim poljima u vakuumu i u sredinama. Posebna pažnja posvećena je matematičkoj tehnici za nalaženje potencijala, odnosno polja u različitim situacijama. Elektromagnetni talasi u vakuumu i sredinama bez disperzije su sadržaj naredne, desete glave. Zatim se, u narednoj glavi analizira elektromagnetno polje koje generišu naelektrisanja u kretanju, kao i uslovi pod kojima ovakvi sistemi zrače elektromagnetne talase. Poslednje glave posvećene su promenljivim poljima u sredinama. Na kraju su četiri matematička dodataka. Prvi dodatak su formule iz vektorske analize. U naredna tri sumirane su osobine Dirakove delta funkcije, Ležandrovih polinoma i Beselovih funkcija.

Veliku zahvalnost dugujem kolegama Milanu Kneževiću i Mariji Dimitrijević, profesorima Fizičkog fakulteta, koji su mi kao recenzenti ove knjige puno pomogli svojim sugestijama.

Takodje, zahvaljujem se i Dušku Latasu, docentu Fizičkog fakulteta, koji je nacrtao sve slike u ovoj knjizi.

Beograd, 2015.

Voja Radovanović
e-mail: rvoja@ipb.ac.rs

Glava 1

Naelektrisanje i elektromagnetno polje

U prvom poglavlju ove glave uvode se osnovni pojmovi klasične elektrodinamike: naelektrisanje i elektromagnetno polje i diskutuje njena primenljivost. U drugom poglavlju definisane su gustine naelektrisanja i struja, a u sledećem je pokazano da one zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta, tj. zakon održanja naelektrisanja. Održanje naelektrisanja je jedan od fundamentalnih zakona prirode. Posebna pažnja posvećena je Dirakovoj delta funkciji i njenoj primeni u elektrodinamici.

1.1 Uvod

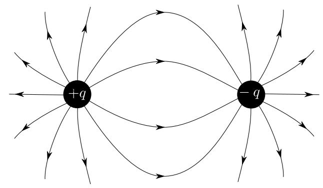
U prirodi postoje četiri interakcije: gravitaciona, elektromagnetna, slaba i jaka. Gravitaciona interakcija dominira u našem Univerzumu i u Sunčevom sistemu. Mnogi efekti ove interakcije su vam poznati. Ona je odgovorna za plimu i oseku na Zemlji. Slabe i jake interakcije su vezane za mnogo niže skale, reda dimenzija protona i manje. Elektromagnetna interakcija je interakcija izmedju naelektrisanih tela. Ona je pored gravitacione interakcije dominantna u našim životima. Mnoge makroskopske sile, kao npr. sila trenja, su sa mikroskopske tačke gledišta elektromagnetnog porekla. Interakcije izmedju atoma i molekula unutar makroskopskih sredina, kao i interakcije unutar atoma i molekula izmedju njihovih naelektrisanih čestica su takodje elektromagnetne. Ova knjiga je posvećena klasičnoj elektrodinamici, što znači da ćemo analizirati one situacije u kojima su kvantni efekti zanemarljivi.

Dva osnovna entiteta u elektrodinamici su naelektrisanje i elektromagnetno polje. Naelektrisanje je izvor elektromagnetnog polja. Tela se mogu naelektrisati medjusobnim dodirom i/ili trljanjem. Pri tome elektroni sa jednog tela prelaze na drugo telo. Tela sa viškom, odnosno manjkom elektrona su negativno, odnosno pozitivno naelektrisana. Naelektrisanje elektrona je prvi, 1910. godine, izmerio Mileken. Ono iznosi $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C. Naelektrisanje nekog tela je celobrojni umožak elementarnog naelektrisanja[1], e tj.

$$Q = Ne \ , N \in \mathbf{Z} \ .$$

Dakle, naelektrisanje tela je diskretno i izraženo preko 'kvanta' elementarnog naelektrisanja. Medjutim, u većini primera višak ili manjak elektrona tela, N je dosta veliki. Iz tog razloga

[1] Naelektrisanje kvarkova nije celobrojan umnožak elementarnog naelektrisanja, npr. neelektrisanje up-(gornjeg) kvarka je $(2/3)e$.



Slika 1.1: Električno polje dva tačkasta naelektrisanja

možemo smatrati da je naelektrisanje tela kontinualna funkcija. To se vidi iz sledećeg primera. Naelektrisanje metalne kugle poluprečnika $r = 10$ cm, čiji je potencijal $\phi = 100V$ je

$$Q = 4\pi\epsilon_0\phi R = 10^{-9} \text{ C} .$$

Lako se dobija da je $N \approx 10^{10}$.

U poglavlju 1.6 videćemo de se elektromagnetno polje odredjuje preko sile kojom polje deluje na tačkasto naelektrisanje. Elektromagnetno polje ima impuls, energiju i moment impulsa. Ove veličine ćemo uvesti u 4 glavi ove Knjige. Elektromagnetna interakcija se u vakuumu prenosi brzinom svetlosti $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$.

Ukoliko je impuls fotona mnogo manji od impulsa sistema, $p_f \ll p_s$ onda merni aparat ne vidi pojedinačane fotone. Tada primenjujemo klasičnu elektrodinamiku. Navešćemo dva primera. Jačina električnog polja sijalice snage $P = 100W$ na rastojanju $l = 1$ m je $E = 50\ \mathrm{Vm}^{-1}$. Fluks fotona je $n_f = 10^{15} \frac{1}{\mathrm{cm}^2\mathrm{s}}$. Električno polje antena snage $P = 100$W, frekvence $\nu = 10^8$Hz na rastojanju $l = 100$km je $E = 5\mu\mathrm{Vcm}^{-1}$ dok je fluks fotona $n_f = 10^{12} \frac{1}{\mathrm{cm}^2\mathrm{s}}$. U oba slučaja broj fotona je veliki pa elektromagnetno polje opisujemo vektorima jačina polja $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, tj. koristimo klasičnu elektrodinamiku.

Rasejanje fotona na elektronu $(\gamma + e^- \to \gamma + e^-)$ je Komptonov efekt. Impuls fotona je $p_f = \frac{\hbar\omega}{c}$, dok je impuls elektrona reda $p_e \sim mc$. U ovom slučaju "vidimo" pojedinačni foton, pa je klasična elektrodinamika neprimenljiva. Da bi analizirali ovaj proces moramo primeniti kvantnu elektrodinamiku. Klasična elektrodinamika je limes kvantne elektrodinamike.

1.2 Naelektrisanje

Prvo ćemo uvesti pojam tačkastog naelektrisanja. To može biti aproksimacija naelektrisanog tela čije dimenzije možemo zanemariti u datoj situaciji ili stvarno tačkasto naelektrisanje, kao što su elementarne čestice. Elementarne čestice, u koje spadaju leptoni i kvarkovi, su čestice bez unutrašnje strukture.

Već smo rekli da u mnogim situacijama možemo smatrati da je naelektrisanje neprekidno rasporedjeno unutar neke oblasti. Tada govorimo o kontinumu naelektrisanja. Model kontinuma je zasnovan na pojmu fizički beskonačno male zapremine ΔV_0, i fizički beskonačno malog intervala vremena, Δt_0. Neka su dimenzije makroskopskog sistema L, i neka je l srednje medjumolekulsko rastojanje. Fizički mala zapremina je mnogo manja od zapremine celog sistema, ali mnogo veća od l^3, tj.

$$l^3 \ll \Delta V_0 \ll L^3 .$$

Ona sadrži veliki broj čestica, ali ipak mnogo manje nego što je njihov ukupan broj u sistemu. Osnovna ideja modela kontinuma je da "ne vidimo" granulastu strukturu materije, tj. da ne pravimo limes $\Delta V \to 0$ oko tačke u prostoru. Tako su nam tačke razmazane u zapremini ΔV_0. Potpuno analogno se uvodi i fizički beskonačno mali interval vremena Δt_0 koji zadovoljava

$$\frac{l}{v} \ll \Delta t_0 \ll T \ ,$$

gde je v srednja brzina molekula, a T karakteristično vreme sistema.

Sa $\Delta q_{\Delta V}(t)$ obeležićemo naelektrisanje koje se nalazi u zapremini ΔV oko tačke $\mathbf{r}$ u trenutku t, a sa $\langle \Delta q_{\Delta V}(t) \rangle$ srednju vrednost ovog naelektrisanja usrednju unutar vremenskog intervala $\left(t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right)$. Gustina naelektrisanja[2] je definisana sa

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \to \Delta V_0, \Delta t \to \Delta t_0} \frac{\langle \Delta q_{\Delta V}(t) \rangle}{\Delta V} \ . \tag{1.2.1}$$

Jedinica za zapreminsku gustinu naelektrisanja je Cm^{-3}. Ukupno naelektrisanje koje se nalazi u oblasti V, u trenutku t je

$$Q = \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(t, \mathbf{r}) \ .$$

Kretanje neprekidne sredine je opisano poljem brzine $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. U elektrodinamici ćemo uvesti jedno drugo vektorsko polje koje opisuje kretanje kontinualne naelektrisane sredine. Naelektrisanje $\mathrm{d}q$ koje za vreme $\mathrm{d}t$ prodje kroz površinu $\mathrm{d}\mathbf{S}$ sa slike 1.2 je

$$\mathrm{d}q = \rho(\mathbf{r}, t)\mathrm{d}\mathbf{S} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}t = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{d}t \ .$$

U prethodnom izrazu veličina $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ je vektor gustine struje. Njegov intenzitet je jednak pozitivnom naelektrisanju koje u jedinici vremena prodje kroz jediničnu površinu postavljenu normalno na pravac prenošenja naelektrisanja. Jačina struje kroz površ S je očigledno

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ ,$$

tj. ona je fluks vektora gustine struje.

1.3 Dirakova delta funkcija

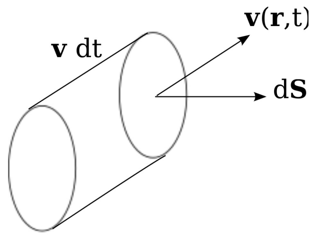
Definišimo funkciju $\delta_\varepsilon(x - a)$ na sledeći način

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{\varepsilon^2}} \ . \tag{1.3.2}$$

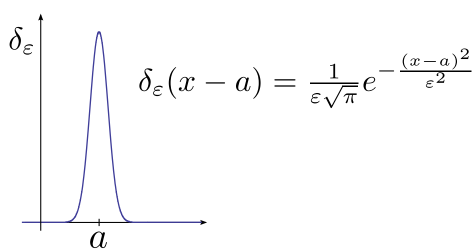
Normalizacioni faktor $1/(\varepsilon\sqrt{\pi})$ je izabran tako da važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x - a) dx = 1 \ .$$

[2] Koristi se i termin zapreminska gustina naelektrisanja.



Slika 1.2: Naelektrisanje koje se nalazi u iskošenom valjku proći će kroz površinu d$\mathbf{S}$ za vreme dt.



Slika 1.3: Funkcija $\delta_\varepsilon(x-a)$.

U tački $x = a$ ova funkcija ima maksimalnu vrednost $1/\varepsilon$. Širina krive je proporionalna sa ε. Kada smanjujemo parametar ε funkcija $\delta_\varepsilon(x-a)$ postaje sve uža i uža i sve viša i viša. Površina ispod ove krive ne zavisi od paramaetra ε, pa je ona jednaka jedinici i nakon limesa $\epsilon \to 0$. Delta funkcija je limes funkcije $\delta_\varepsilon(x-a)$ kad $\epsilon \to 0$, tj.

$$\delta(x-a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases} , \tag{1.3.3}$$

pri čemu je zadovoljeno

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1 \ . \tag{1.3.4}$$

Delta funkcija $\delta(x-a)$ je svuda jednaka nuli, sem u tački $x = a$ gde je beskonačna. Na osnovu (1.3.4) sledi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)f(x)dx = f(a) \ , \tag{1.3.5}$$

za proizvoljnu neprekidnu funkciju $f(x)$. Jednakost (1.3.5) se često uzima za definiciju delta funkcije. Obično se kaže da delta funkcija izbacuje vrednost podintegralne funkcije $f(x)$ u tački $x = a$. Delta funkcija je zapravo funkcional

$$\delta_a : f(x) \to f(a) \ ,$$

koji funkiju $f(x)$ preslikava u broj $f(a)$.

Navešćemo neke osobine delta funkcije[3]:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \tag{1.3.6}$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{1.3.7}$$

$$f(x)\delta'(x-a) = -f'(x)\delta(x-a) \tag{1.3.8}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{1.3.9}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a)) \ . \tag{1.3.10}$$

U formuli (1.3.9) x_i su proste nule funkcije $f(x)$. Dokažimo prvu osobinu, (1.3.6). Smenom promenljivih $t = ax$ imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(ax)dx &= \int_{-a\infty}^{a\infty} f(t/a)\delta(t)\frac{dt}{a} \\ &= \text{sgn}(a)\int_{-\infty}^{\infty} f(t/a)\delta(t)\frac{dt}{a} \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(t/a)\delta(t)dt = \frac{f(0)}{|a|} \\ &= \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \ . \end{aligned}$$

[3] Ove osobine važe pod integralom.

Time smo pokazali (1.3.6). Specijalno ako u (1.3.6) uzmemo $a = -1$ dobijamo (1.3.7), tj. delta funkcija, $\delta(x)$ je parna. Treća osobina se pokazuje parcijalnom integracijom. Naime

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta'(x-a) &= f(x)\delta(x-a)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f'(x)\delta(x-a) \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f'(x)\delta(x-a) \ . \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

Da bismo dokazali (1.3.9) podjimo od integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x g(x)\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \mathrm{d}x g(x)\delta(f(x)) \tag{1.3.12}$$

gde integralimo u maloj, ε okolini oko svake nule funkcije $f(x)$. Funkcija $g = g(x)$ je proizvoljna test funkcija. U segmentu $(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)$ funkciju $f(x)$ ćemo aproksimirati sa $f(x) = f'(x_i)(x-x_i)$, pa primenom (1.3.6) dobijamo

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \mathrm{d}x g(x)\delta(f(x)) = \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \mathrm{d}x \frac{g(x)}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i) = \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|} \ . \tag{1.3.13}$$

Prema tome

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x g(x)\delta(f(x)) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{g(x)}{|f'(x_i)|}\delta(x-x_i) \ , \end{aligned} \tag{1.3.14}$$

čime smo dokazali četvrtu osobinu. Peta osobina je specijalni slučaj četvrte, za $f(x) = x^2 - a^2$. U izrazu (1.3.5) možemo umesto po celoj realnoj osi integraliti u intevalu (c, d) pri čemu je

$$c < a < d \ .$$

Napomenimo da ukoliko bi se jedna od granica oblasti integracije poklopila sa tačkom $x = a$ imali bismo

$$\begin{aligned}\int_{a}^{d} \mathrm{d}x\delta(x-a) &= \frac{1}{2} \\ \int_{a}^{d} \mathrm{d}x f(x)\delta(x-a) &= \frac{1}{2}f(a) \ , \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

gde je $a < d$. Delta funkcija može biti napisana u integralnom obliku

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{-ik(x-x')} \ . \tag{1.3.16}$$

Primer 1. Pokazati da se delta funkcija, $\delta(x)$ može predstaviti u obliku

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)} \ .$$

Primenom ove formule proveriti integralnu reprezentaciju delta funkcija, (1.3.16).

Rešenje: Pokažimo da je zadovoljena formula (1.3.4). Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-a) &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon}{\pi(x^2+\epsilon^2)} \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{\epsilon}\arctan\frac{x}{\epsilon}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1 \ . \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Da bismo pokazali (1.3.16), oblast integracije po k ćemo podeliti prema

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ikx} = \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ikx} + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}k e^{ikx} \ , \tag{1.3.18}$$

a zatim ćemo u drugom integralu napraviti smenu $k \to -k$ i dodati mali parametar ϵ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0}\Big(\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ik(x+i\epsilon)} - \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}k e^{-ik(x-i\epsilon)} \Big) \ . \tag{1.3.19}$$

Nakon integracije dolazimo do

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{ikx} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{2\epsilon}{x^2+\epsilon^2} = 2\pi\delta(x) \ . \tag{1.3.20}$$

Trodimenzionalna delta funkcija je definisana sa

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}') \ , \tag{1.3.21}$$

gde tačka $\mathbf{r}'$ pripada oblasti integracije V. Ona izbacuje vrednost podintegralne funkcije u tački $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ pod uslovom da ta tačka pripada oblasti integracije V. U Dekartovim koordinatama trodimenziona delta funkcija je proizvod tri jednodimenzione delta funkcije

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z') \ , \tag{1.3.22}$$

gde su (x,y,z) Dekartove koordinate vektora $\mathbf{r}$, a (x',y',z') koordinate vektora $\mathbf{r}'$. Umesto Dekartovih koristimo često koristimo neke druge ortogonalne krivolinijske koordinate. Ako su koordinate tačaka $\mathbf{r}$, odnosno $\mathbf{r}'$ date sa (ξ_1,ξ_2,ξ_3), odnosno (ξ_1',ξ_2',ξ_3') tada je

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{|J|}\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3') \ , \tag{1.3.23}$$

gde je

$$J = \Big| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi_1,\xi_2,\xi_3)} \Big|$$

Jakobijan. Jakobijan u prethodnoj formuli se krati sa jakobijanom u meri inegracije da bi važilo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \int_V \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 |J| \frac{1}{|J|} \delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3') = 1 \; . \tag{1.3.24}$$

U praksi se najčešće susrećemo sa cilindičnim i sfernim koordinatama. Trodimenziona delta funkcija u cilindričnim koordinatama je

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z') \; , \tag{1.3.25}$$

a u sfernim

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\delta(r-r')\delta(\phi-\phi')\delta(\theta-\theta') \; . \tag{1.3.26}$$

Iz definicije delta funkcije (1.3.5) sledi da je dimenzija delta funkcije $[\delta(x-a)] = m^{-1}$. Dimenzija trodimenzione delta funkcije je m^{-3}.

1.4 Tačkasto, linijsko i površinsko naelektrisanje jezikom zapreminskog

Neka se naelektrisanje q_α nalazi u trenutku t u tački sa radijus vektorom $\mathbf{r}_\alpha(t)$. Gustina naelektrisanja je jednaka nuli za $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_\alpha$, dok je za $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\alpha$ beskonačna. Jasno je da je

$$\rho(\mathbf{r},t) = q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)) \tag{1.4.27}$$

kao i

$$\int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r},t) = q_\alpha \; . \tag{1.4.28}$$

Zapreminska gustina naelektrisanja sistema od N tačkastih naelektrisanja je

$$\rho(\mathbf{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)). \tag{1.4.29}$$

Primer 2. Dugačka nit, ravnomerno je naelektrisana sa naelektrisanjem λ po jedinici dužine. Naći zapreminsku gustinu naelektrisanja $\rho(\mathbf{r})$.

Rešenje: Primenom (1.4.27) imamo

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{r}) &= \sum_\alpha \lambda \Delta z_\alpha \delta(x)\delta(y)\delta(z-z_\alpha) \\
&= \lambda\delta(x)\delta(y)\int_{-\infty}^{\infty} dz'\delta(z-z') \\
&= \lambda\delta(x)\delta(y) \; .
\end{aligned}$$

Sada ćemo naći zapreminsku gustinu struje za sistem tačkastih naelektrisanja. Poćićemo od izraza za zapreminsku gustinu struje $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ i zapreminske gustine sistema tačkastih naelektrisanja (1.4.29). Kombinovanjem ovih formula dobijamo:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha(t)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)) \ , \tag{1.4.30}$$

gde je $\mathbf{v}_\alpha(t)$ brzina naelektrisanja indeksa α u trenutku t.

Primer 3. Sfera poluprečnika R ravnomerno je naelektrisana sa naelektrisanjem σ po jedinici površine. Ako sfera rotira konstantnom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega}$ odrediti gustinu struje, $\mathbf{j}(t,\mathbf{r})$.

Rešenje: Neka je $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$. Koordinate tačke na površini sfere su $(R,\theta_\alpha,\varphi_\alpha)$. Brzina delića na površini sfere je

$$\mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\omega}\times R\mathbf{e}_r = \omega R\sin\theta_\alpha \mathbf{e}_\varphi \ .$$

Naelektrisanje ovog delića je

$$\Delta q_\alpha = \sigma R^2 \sin\theta_\alpha \Delta\theta_\alpha \Delta\varphi_\alpha \ .$$

Primenom (1.4.30) imamo

$$\mathbf{j} = \sum_\alpha \sigma R^3 \omega \sin\theta_\alpha \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta(r-R)\delta(\theta-\theta_\alpha)\delta(\varphi-\varphi_\alpha)\mathbf{e}_\varphi \Delta\theta_\alpha\Delta\varphi_\alpha \ .$$

Prelaskom na kontinualnu raspodelu dobijamo

$$\mathbf{j} = \frac{\sigma\omega R^3}{r^2\sin\theta}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \sin^2\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi' \delta(r-R)\delta(\theta-\theta')\delta(\varphi-\varphi')\mathbf{e}_\varphi \ .$$

Integracijom po primovanim polarnim uglovima dobijamo

$$\mathbf{j} = \sigma\omega R\sin\theta\delta(r-R)\mathbf{e}_\varphi \ .$$

1.5 Jednačina kontinuiteta

Naelektrisanje se održava u svim procesima u prirodi. Neka je V nepokretna zapremina unutar neprekidne sredine. Naelektrisanje u ovoj zapremini je

$$Q(t) = \int_V \rho(t,\mathbf{r})\mathrm{d}^3 r \ .$$

Ono se menja ukoliko naelektrisanja ulaze ili napuštaju oblast V. Promena naelektrisanja u toj zapremini u jedinici vremena je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3 r\rho(\mathbf{r},t) = \int_V \mathrm{d}^3 r\frac{\partial\rho}{\partial t} \ . \tag{1.5.31}$$

Sa druge strane promena naelektrisanja u jedinici vremena u oblasti V jednaka je negativnom fluksu gustine struje kroz granicu oblasti S, tj.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\oint_S \mathbf{j}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{div}\mathbf{j} \ . \tag{1.5.32}$$

U poslednjoj formuli primenili smo Gausovu teoremu. Kombinovanjem gornjih relacija dolazimo do

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{j} = 0 \ . \tag{1.5.33}$$

Poslednja jednačina je jednačina kontinuiteta i ona je zakon održanja naelektrisanja u diferencijalnom obliku.

Neka su u sistemu prisutne različite vrste naelektrisanja, npr. elektroni, protoni, joni i druge naelektrisane čestice. Jedna vrsta naelektrisanih čestica može preći u drugu, ali tako da važi zakon održanja ukupnog naelektrisanja. Dakle, održava se ukupno naelektrisanje. Zakon održanja naelektrisanja je fundamentalan zakon u prirodi. On važi ne samo u klasičnoj, već i u kvantnoj fizici.

Primer 4. Pokazati da izrazi (1.4.29) i (1.4.30) zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta.
Rešenje: Lako se dobija da je

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)).$$

Sa druge strane primenom (A.0.4) dobijamo

$$\mathrm{div}\mathbf{j} = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)).$$

1.6 Elektromagnetno polje

Kao što smo rekli u uvodu elektromagnetno polje se u klasičnoj elektrodinamici opisuje dvema vektorskim funkcijama: jačinom električnog polja $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i magnetnom indukcijom[4] $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Električno i magnetno polje su šest skalarnih funkcije koje pridružujemo svakoj tački prostora i zavise od vremena. Polje je sistem sa beskonačno puno stepeni slobode.

Električno i magnetno polje se odredjuju pomoću sile

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ . \tag{1.6.34}$$

[4] Često se umesto termina jačine električnog polja koristi samo električno polje. Umesto termina magnetna indukcija koristi se magnetno polje (ili jačina magnetnog polja). U ovoj Knjizi mi ćemo koristiti termin magnetna indukcija, ponekad magnetno polje. Termin magnetna indukcija se koristi više iz istorijskih razloga.

kojom elektromagnetno polje deluje na probno naelektrisanje q. Ova sila je poznata pod imenom Lorencova sila. Naravno predpostavljamo da probno naelektrisanje ne perturbuje raspodelu naelektrisanja i struja koje kreiraju elektromagnetno polje. U slučaju neprekidne raspodele naelektrisanja Lorencova sila je

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int \rho \mathrm{d}^3 r(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}) \; . \\ &= \int (\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B})\mathrm{d}^3 r \; . \end{aligned}$$

Izraz $\mathbf{f}=\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}$ je zapreminska gustina Lorencove sile.

Kao i svako drugo vektorsko polje i za elektromagnetno se definišu linije polja. Linije električnog polja su definisane kao linije čije tangente u datom trenutku vremena su jačine polja u datim tačkama u tom trenutku vremena. Dakle,

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z(x,y,z,t)} \; . \tag{1.6.35}$$

Linije električnog polja se dobijaju rešavanjem gornjeg sistema diferencijalnih jednačina. Linije magnetnog polja se definišu analogno, tj.

$$\frac{\mathrm{d}x}{B_x(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}y}{B_y(x,y,z,t)} = \frac{\mathrm{d}z}{B_z(x,y,z,t)} \; . \tag{1.6.36}$$

U prethodnim jednačinama vreme t igra ulogu parametra.

Glava 2

Maksvelove jednačine

Ova glava posvećena je Maksvelovim jednačinama za polje u vakuumu. One opisuju klasično elektromagnetno polje. U prvom delu ove glave izložene su osnove elektrostatike i magnetostatike. Sadržaj ova dva poglavlja vam je poznat od ranije, sa kursa Opšte fizike. Takodje, razmatra se elektrostatičko i magnetostatičko polje na velikim rastojanjima od naelektrisanog sistema čestica. Uvode se veličine koje karakterišu raspodelu naelektrisanja: dipolni i kvadrupolni momenti. Naredno, peto poglavlje posvećeno je Faradajevom zakonu indukcije. U šestom poglavlju uvedene su Maksvelove jednačine, za polje u vakuumu. U poslednjem poglavlju uvešćemo potencijale elektromagnetnog polja i analizirati njihovu nejednoznačnost. Ispostaviće se da je nejednoznačnost potencijala polja jedna od fundamentalnih simetrija u prirodi, tzv. kalibraciona simetrija.

2.1 Elektrostatika

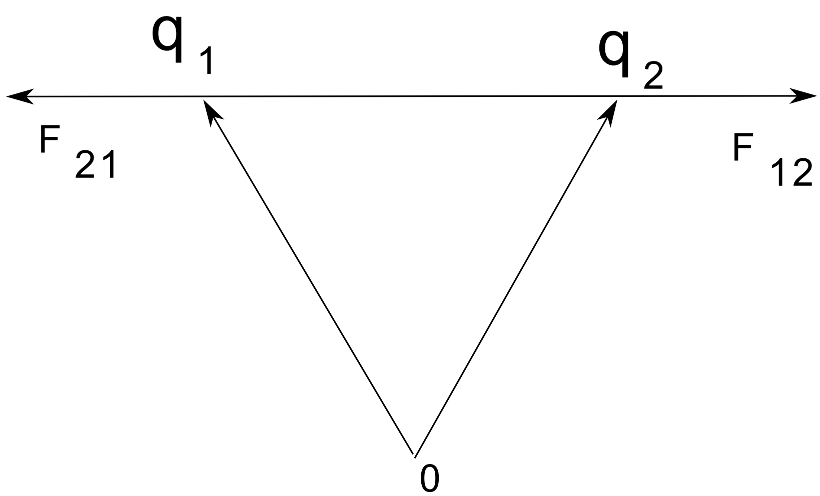
U ovom poglavlju izložićemo osnove elektrostatike. Elektrostatičko polje je vremenski nezavisno polje i njega stvaraju naelektrisanja koja miruju.

2.1.1 Kulonov zakon

Naelektrisanja koja miruju stvaraju električno polje koje ne zavisi od vremena, tj. elektrostatičko polje. Osnovni zakon elektrostatike je Kulonov zakon (kraj 18. veka) i on je ustanovljen eksperimentalno. Sila interakcije izmedju naelektrisanja q_1 i q_2 u sistemu reference gde oba naelektrisanja miruju proporcionalna je naelektrisanjima, a obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja izmedju njih. Kulonova sila je usmerena duž pravca koji spaja naelektrisanja. Ako su $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$ radijus vektori naelektrisanja q_1 odnosno q_2 onda je sila kojom naelektrisanje q_1 deluje na naelektrisanje q_2 (slika 2.1)

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \ . \tag{2.1.1}$$

Konstanta $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\frac{F}{m}$ je električna konstanta vakuuma (ili električna propustljivost), dok je $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{m}{F}$. Sila kojom naelektrisanje q_2 deluje na naelektrisanje q_1 je $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.



Slika 2.1: Kulonova interakcija izmedju naelektrisanja q_1 i q_2 istog znaka.

Kako je $\mathrm{rot}_2\mathbf{F}_{12} = 0$ Kulonova interakcija je konzervativna, tj. sila je negativan gradijent potencijalne energije

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_2 W \ . \tag{2.1.2}$$

Potencijalna energija interakcije[1] ova dva tačkasta naelektrisanja je

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \ . \tag{2.1.4}$$

2.1.2 Električno polje i potencijal

Elektrostatičko polja se odredjuje preko sile koja deluje na probno naelektrisanje

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}}{q_p} \ . \tag{2.1.5}$$

Primenom Kulonovog zakona polje u tački $\mathbf{r}$ tačkastog naelektrisanja q postavljenog u tačku $\mathbf{r}'$ je

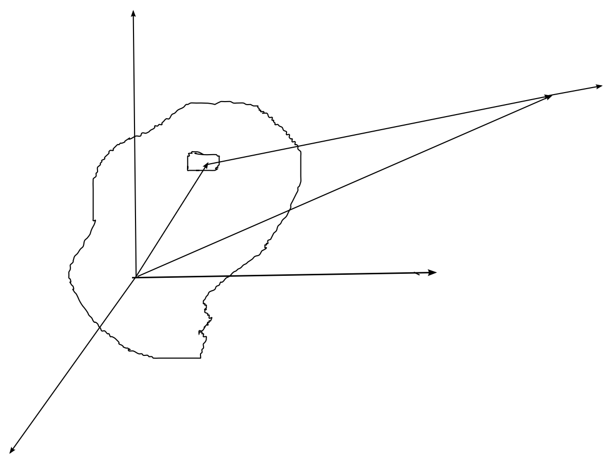
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \ . \tag{2.1.6}$$

Ako imamo više nepokretnih naelektrisanja $q_1, \ldots, q_N$ kao izvore električnog polja, ukupno polje je vektorski zbir polja koja potiču od svakog naelektrisanja ponaosob

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{N}\frac{q_\alpha(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha|^3} \ . \tag{2.1.7}$$

[1]

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 W \tag{2.1.3}$$



Slika 2.2: Elektrostatičko polje d$\mathbf{E}(\mathbf{r})$ generisano naelektrisanjem $\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'$.

Ovo je princip superpozicije. U slučaju neprekidne raspodele naelektrisanja $\rho = \rho(\mathbf{r})$ električno polje je

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ . \tag{2.1.8}$$

Lako se pokazuje da je rot$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$ pa možemo uvesti potencijal elektrostatičkog polja ϕ sa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \ .$$

Potencijal u tački $\mathbf{r}$ je odredjen sa

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ . \tag{2.1.9}$$

Primenom

$$\nabla\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) = -\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}, \tag{2.1.10}$$

lako se vidi da potencijal (2.1.9) daje polje (2.1.8). U formuli (2.1.10) sa ∇ je obeležen gradijent po koordinatama vektora $\mathbf{r}$. Gradijent po koordinatama vektora $\mathbf{r}'$ obeležavaćemo jednim dopunskim primom, tj. sa ∇'. Ovakvu notaciju primenjivaćemo generalno za diferencijalne operatore.

Rad elektrostatičkog polja pri premeštanju naelektrisanja q iz tačke A u tačku B u polju je

$$A = \int_A^B \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = -q\int_A^B \nabla\phi\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = q(\phi_A-\phi_B) = -(W_B-W_A) = -\Delta W \ . \tag{2.1.11}$$

Vidimo da je rad jednak negativnoj promeni potencijalne energije naeletrisanja u polju i da ne zavisi od oblika tajektorije. Ako je putanja naelektrisanja zatvorena rad polja je jednak nuli, tj.

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = 0 \ .$$

Elektrostatičko polje je konzervativno.

2.1.3 Gausova teorema

U prethodnom poglavlju pokazali smo da je rotor elektrostatičkog polja jednak nuli. Sada ćemo naći divergenciju elektrostatičkog polja. Prvo ćemo pokazati Dirak-Grinov identitet:

$$\triangle\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ . \tag{2.1.12}$$

Jednostavnosti radi uzmimo da je $r' = 0$. Za $r \neq 0$ imamo

$$\triangle\Big(\frac{1}{r}\Big) = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(r\frac{1}{r}) = 0 \ . \tag{2.1.13}$$

Za $r = 0$ gornji račun je neprimenljiv, jer je funkcija $1/r$ singularna u tački $r = 0$. Zato ćemo funkciju $1/r$ predstaviti u obliku

$$\frac{1}{r} = \lim_{a\to 0}\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}} \ , \tag{2.1.14}$$

gde je a regularizacioni parametar. Laplasijan je onda dat sa

$$\triangle\Big(\frac{1}{r}\Big) = \lim_{a\to 0}\triangle\Big(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\Big) = -\lim_{a\to 0}\frac{3a^2}{(r^2+a^2)^{5/2}} \ . \tag{2.1.15}$$

Integracija po celom prostoru daje

$$\int_0^\infty \triangle\Big(\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}\Big)r^2 4\pi\mathrm{d}r = -12\pi a^2\int_0^\infty \frac{r^2\mathrm{d}r}{(r^2+a^2)^{5/2}} = -4\pi \ . \tag{2.1.16}$$

Dobijeni rezultat ne zavisi od parametra a. Kako je rezultat integracije konstanta, to je podintegralna funkcija proporcionalna delta funkciji. Koeficijent proporcionalnosti nam daje prethodni račun. Dakle

$$\triangle\Big(\frac{1}{r}\Big) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \ . \tag{2.1.17}$$

Ovim smo dokazali Dirak-Grinov identitet.

Odredimo divergenciju elektrostatičkog polja. Kao prvo vidimo da je

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = -\mathrm{div}\nabla\phi = -\triangle\phi \ . \tag{2.1.18}$$

Primenom Dirak-Grinovog identiteta i izraza (2.1.9) imamo

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\mathbf{r}')\triangle\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\rho(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \ . \tag{2.1.19}$$

Dakle,

$$\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r}) \tag{2.1.20}$$

Poslednja relacija je Gausova teorema u lokalnom (diferencijalnom) obliku. Izvor elektrostatičkog polja je naelektrisanje. Integralni oblik Gausove teoreme se dobija integracijom jednačine (2.1.20) po zapremini

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \mathrm{d}^3r\,\rho(\mathbf{r}) \tag{2.1.21}$$

odnosno

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}) \ . \tag{2.1.22}$$

Fluks elektrostatičkog polja kroz ma koju zatvorenu površ jednak je ukupnom naelektrisanju koje se nalazi u zapremini čija je granica ta površ podeljenom sa ε_0. To je Gausova teorema u integralnom obliku. Iz (2.1.19) vidimo da potencijal zadovoljava Poasonovu jednačinu

$$\triangle \phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \ . \tag{2.1.23}$$

Jednačine koje kompletno odredjuju elektrostatičko polje su

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0} \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{2.1.24}$$

2.1.4 Razlaganje skalarnog potencijala po multipolima

Neka se unutar neke oblasti V linearnih dimenzija d nalazi naelektrisanje čija je zapreminska gustina $\rho = \rho(\mathbf{r})$ poznata. Potencijal električnog polja je

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ . \tag{2.1.25}$$

Na velikim rastojanjima od ovog sistema ($d \ll r$) potencijal se može razviti u red po stepenima od d/r. Da bismo to pokazali podintegralni izraz $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ ćemo razviti u red po stepenima (d/r). Pretpostavićemo da je $d \ll r$, pa ćemo zadržati samo nekoliko prvih članova. Primenom binomne formule imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\Big(1 + \frac{r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}\Big)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{r}\Big(1 - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{r^2} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^4} + \dots\Big) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \dots \ . \end{aligned} \tag{2.1.26}$$

Poslednji član u prethodnom izrazu prepisaćemo u obliku

$$3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2 - r^2 r'^2 = \sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \ , \tag{2.1.27}$$

gde su x_i i x'_i Dekartove koordinate vektora $\mathbf{r}$ odnosno $\mathbf{r}'$. Zamenom (2.1.26) u (2.1.25) imamo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{r}\int \rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r' + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r' + \frac{1}{2r^5}\sum_{i,j=1}^{3} x_i x_j \int \rho(\mathbf{r}')(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\mathrm{d}^3 r' + \dots\Big) \ . \tag{2.1.28}$$

Integral u prvom sabirku u (2.1.28) je ukupno naelektrisanje Q sistema. Drugi sabirak sadrži električni dipolni moment sistema naelektrisanja

$$\mathbf{p} = \int \mathbf{r}'\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' \ . \tag{2.1.29}$$

Za sistem tačkastih naelektrisanja dipolni moment je

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \mathrm{d}^3r \ \mathbf{r}\rho(\mathbf{r}) \\ &= \sum_\alpha q_\alpha \int \mathrm{d}^3r \ \mathbf{r}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha) \\ &= \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha \ . \end{aligned} \tag{2.1.30}$$

Dipolni moment zavisi od izbora koordinatnog početka. Ovo se lako pokazuje. Veličina

$$D_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}')(3x'_i x'_j - r'^2\delta_{ij})\mathrm{d}^3r' \tag{2.1.31}$$

je tenzor kvadrupolnog momenta. Razvoj (2.1.28) postaje

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{p}}{r^3} + \frac{\sum_{i,j=1}^3 x_i x_j D_{ij}}{2r^5} + \dots\Big) \ . \tag{2.1.32}$$

U najnižoj aproksimaciji potencijal na velikim rastojanjima od sistema naelektrisanja je potencijal tačkastog naelektrisanja Q smeštenog u koordinatnom početku. To je tzv. monopolni član i on je oblika $1/r$. Sledeći član u razvoju potencijala je oblika $1/r^2$ i to je dipolni član. Naredna korekcija potencijala, koja se na velikim rastojanjima ponaša kao $1/r^3$ je kvadrupolni član.

Primer 1. Za linearni kvadrupol sastavljen od tri naelektrisanja: q u tački $(0,0,a)$, q u tački $(0,0,-a)$ i $-2q$ u koordinatnom početku, odrediti ukupno naelektrisanje, električni dipolni moment i kvadrupolni moment. Naći potencijal na velikim rastojanjima od linarnog kvadrupola. Rešenje: Lako se dobija da je $Q=0$, $\mathbf{p}=0$ i

$$D = \begin{pmatrix} -2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2 \end{pmatrix} \ . \tag{2.1.33}$$

Vodeći član u razvoju potencijala je kvadrupolni član:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qa^3}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) \ , \tag{2.1.34}$$

gde je θ sferna koordinata.

Pokažimo sada da je tenzor kvadrupolnog momenta euklidski tenzor. Pri rotaciji koordinatnog sistema (pasivna interpretacija) Dekartov bazis $\{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ prelazi u $\{\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$. Primovane bazisne vektore možemo razviti po starim

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}\mathbf{e}_j \ . \tag{2.1.35}$$

Koeficijenti u razvoju R_{ij} čine matricu rotacije R. Ova matrica je ortogonalna, $R^TR = RR^T = I$ i zadovoljava uslov $\det R = 1$. To su tzv. specijalne ortogonalne matrice, SO(3). Pri rotaciji koordinatnog sistema koordinate vektora se transformišu, dok se sam vektor ne menja. Iz

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} x_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{3} x'_i\mathbf{e}'_i$$

imamo

$$\sum_{j=1}^{3} x_j\mathbf{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} x'_iR_{ij}\mathbf{e}_j$$

odnosno

$$x_j = \sum_{i=1}^{3} R_{ij}x'_i = \sum_{i=1}^{3}(R^T)_{ji}x'_i$$

odakle dobijamo zakon tranformacije Dekartovih koordinata vektora položaja:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3}((R^T)^{-1})_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{3} R_{ij}x_j \ , \tag{2.1.36}$$

gde smo u poslednjem koraku iskoristili činjenicu da je matrica R ortogonalna.
Neka su D_{ij} komponente tenzora kvadrupolnog momenta u sistemu S, a D'_{ij} njegove komponente u sistemu dobijenog rotacijom iz S. Ako sada zakon transformacije koordinata pri rotacijama (2.1.36) zamenimo u izraz za komponetnte tenzora kvadrupolnog momenta u primovanom sistemu

$$D'_{ij} = \int \rho(\mathbf{r}')(3x'_ix'_j - r'^2\delta_{ij})\mathrm{d}^3r' \tag{2.1.37}$$

dobijamo

$$\begin{aligned} D'_{ij} &= \int \rho(\mathbf{r})(3R_{ik}R_{jl}x_kx_l - r^2\delta_{ij})\mathrm{d}^3r \\ &= \int \rho(\mathbf{r})R_{ik}R_{jl}(3x_kx_l - r^2\delta_{kl})\mathrm{d}^3r \\ &= R_{ik}R_{jl}D_{kl} \\ &= (RDR^T)_{ij} \ . \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

Time smo pokazali da su D_{ij} stvarno komponente tenzora drugog reda. Zašto je $\mathrm{d}^3r' = \mathrm{d}^3r$ i $\delta_{ij} = R_{ik}R_{jl}\delta_{kl}$?

Navešćemo neke osobine tenzora kvadrupolnog momenta.

1. Tenzor kvadrupolnog momenta je simetričan tenzor nultog traga. Njegov trag je nula zbog

$$\sum_{i=1}^{3}(3x_i'x_i' - r'^2\delta_{ii}) = 0 \ . \tag{2.1.39}$$

2. Ako je raspodela naelektrisanja sferno-simetrična, $\rho = \rho(r)$ onda je tenzor kvadrupolnog momenta jednak nula. Ovo se lako pokazuje, npr.

$$D_{11} = \int_0^\infty \mathrm{d}r r^4 \rho(r) \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi (3\sin^2\theta\cos^2\phi - 1) = 0 \ . \tag{2.1.40}$$

Nenulti matrični elementi tenzora kvadrupolnog momenta opisuju odstupanje sistema od sferne simetrije.

3. Ako sistem poseduje aksijalnu simetriju, tj. invarijantnost na rotacije oko $z-$ ose, tenzor kvadrupolnog momenta je dijagonalnog oblika

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -2D_{11} \end{pmatrix} \ . \tag{2.1.41}$$

Iz (2.1.32) lako možemo dobiti izraz za električno polje na velikim rastojanjima:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{Q}{r^3}\mathbf{r} + \frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} + \dots\Big) \ . \tag{2.1.42}$$

Prvi član je monopolni dok je drugi dipolni.

Električni dipol

Električni dipol je sistem dva nalektrisanja q i $-q$ na rastojanju l. Dipolni moment dipola je $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$, gde je vektor $\mathbf{l}$ usmeren od negativnog ka pozitivnom naelektrisanju. Tačkasti dipol je dipol kod kojeg je rastojanje izmedju naelektrisanja, l infinitezimalno malo, ali je pri tome njegov dipolni moment konačan. Neka se tačkasti dipol nalazi u tački $\mathbf{r_0}$. Potencijal dipola je zbir potencijala naelektrisanja q i $-q$ koji se nalaze redom u tačkama $\mathbf{r_0} + \frac{\mathbf{l}}{2}$, odnosno $\mathbf{r_0} - \frac{\mathbf{l}}{2}$ u limesu $l \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|$, odnosno

$$\phi(\mathbf{r}) = \lim_{l\to 0}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Bigg(\frac{q}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r_0} - \frac{\mathbf{l}}{2}\right|} - \frac{q}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r_0} + \frac{\mathbf{l}}{2}\right|}\Bigg) \ . \tag{2.1.43}$$

Primenom (2.1.26) dobijamo potencijal dipola

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{p}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r_0})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}|^3} \ . \tag{2.1.44}$$

Ovaj izraz se poklapa sa dipolnim članom u razvoju potencijala po multipolima. U daljem možemo uzeti da se dipol nalazi u koordinatnom početku, tj. da je $\mathbf{r_0} = 0$. Električno polje se dobija izračunavanjem gradijenta potencijala. Za $\mathbf{r} \neq 0$ električno polje tačkastog dipola je jednako drugom sabirku u izrazu (2.1.42). Medjutim, električno polje dipola sadrži jos jedan sabirak koji je značajan u tački u kojoj se nalazi dipol. Rezultat za polje dipola je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{3(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} - \frac{4\pi}{3}\mathbf{p}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\Big) \ . \tag{2.1.45}$$

Prvi član u (2.1.45) je isti kao dipolna korekcija u razvoju (2.1.42). Da bismo se uverili u korektnost sabiraka proporcionalnog delta funkciji integralimo električno polje dipola po kugli, poluprečnika R sa centrom u koordinatnom početku:

$$\begin{aligned}\int_{r<R} \mathbf{E}\mathrm{d}^3 r &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{r<R}\nabla\Big(\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3}\Big)\mathrm{d}^3 r \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} p\cos^2\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathbf{e}_3 \\ &= -\frac{\mathbf{p}}{3\epsilon_0} \ . \end{aligned}\tag{2.1.46}$$

Primenili smo formulu (A.0.11) iz vektorske analize i pretpostavili smo da je električni dipolni moment usmeren duž $z-$ose. Prvi sabirak u (2.1.45) daje nulti doprinos zapreminskom integralu definisanom gore, dok drugi sabirak daje dobijeni rezultat. Napomenimo da se gornji rezultat može dobiti primenom generalisanog Dirak–Grinovog identiteta

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{r}\Big) = \frac{3x_i x_j - r^2\delta_{ij}}{2r^5} - \frac{4\pi}{3}\delta_{ij}\delta^{(3)}(\mathbf{r}) \ . \tag{2.1.47}$$

Pre toga potencijal dipola zapišite u obliku

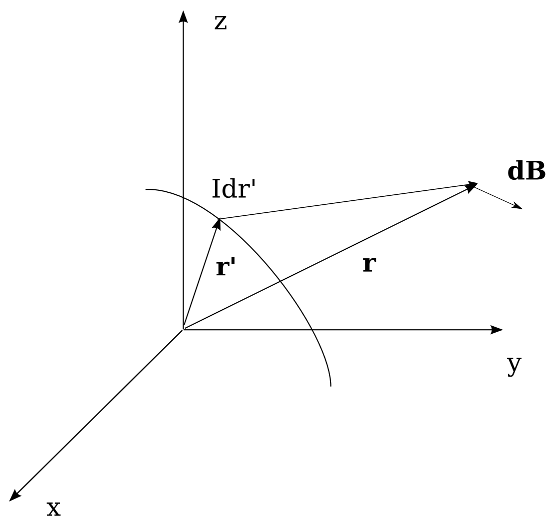
$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\mathbf{p}\cdot\nabla\Big(\frac{1}{r}\Big) \ . \tag{2.1.48}$$

2.2 Magnetostatika

Istorija magnetizma je dosta duga. U početku su se magnetizam i elektrostatika potpuno nezavisno razvijali. Početkom devetnaestog veka Ersted je otkrio da se magnetna igla kompasa postavljena u polju magneta ponaša na isti način kao i kada je postavimo u polje strujnog provodnika. Iz ovog eksperimenta se zaključuje da naelektrisanja u kretanju generišu magnetno polje baš kao i sam magnet.

2.2.1 Bio Savar Laplasov zakon

Magnetostatičko polje generišu naelektrisanja koja se kreću stacionarno. To znači da gustina struje ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Takodje gustina naelektrisanja kod stacionarnog kretanja ne zavisi eksplicitno od vremena. U većini slučajeva zapremiska gustina naelektrisanja je jednaka nuli, $\rho(\mathbf{r}) = 0$, tj. provodnik je elektroneutralan, pa je električno



Slika 2.3: Bio-Savar-Laplasov zakon.

polje jednako nuli. Osnovni zakon magnetostatike je Bio–Savar–Laplasov zakon. On za zadatu raspodelu gustine struje kao izvora magnetnog polja odredjuje magnetno polje. Ako kroz linijski provodnik[2] protiče struja jačine I, magnetna indukcija u tački $\mathbf{r}$ je data sa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \;, \tag{2.2.49}$$

gde je

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$$

magnetna konstanta (ili magnetna permeabilnost) vakuuma. Ako se poprečni presek provodnika ne može zanemariti potrebno je da strujni element $I\mathrm{d}\mathbf{r}'$ zamenimo na sledeći način:

$$I\mathrm{d}\mathbf{r}' \to \frac{I}{\Delta S_\perp} \mathrm{d}\mathbf{r}' \Delta S_\perp = \mathbf{j}\, \mathrm{d}V' \;, \tag{2.2.50}$$

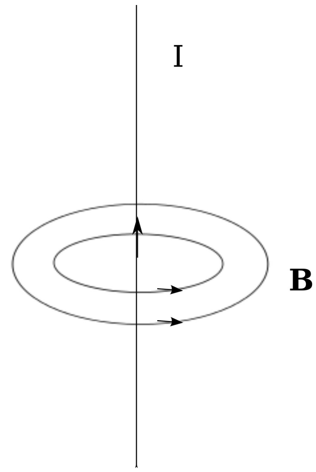
gde je $\Delta S_\perp$ površina provodnika ortogonalna na pravac prenošenja naelektrisanja. Magnetna indukcija koju generiše gustina struje $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ je data sa

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \;. \tag{2.2.51}$$

Magnetnu indukciju možemo izraziti preko vektorskog potencijala, $\mathbf{A}$, na sledeći način $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Vektorski potencijal je dat sa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathrm{d}^3 r' \;. \tag{2.2.52}$$

[2] Poprečni presek linijskog provodnika je zanemarljiv.



Slika 2.4: Magnetno polje linijskog provodnika

Ovo se, primenom (A.0.7) neposredno proverava:

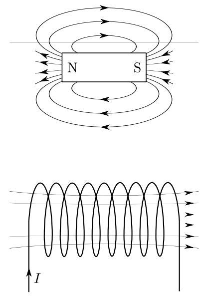
$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{rot}\Big[\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big]\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\Big[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}') - \mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\bigtriangledown\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \mathbf{B}(\mathbf{r})\ ,
\end{aligned}$$

jer je $\mathrm{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$ i

$$\bigtriangledown\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\ .$$

Iz izraza $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ sledi da je $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$. Poslednji izraz znači da je magnetno polje bezizvorno tj. ne postoje magnetna naelektrisanja. Drugim rečima magnetne linije nemaju ni početak ni kraj; ili su zatvorene ili počinju i završavaju se u beskonačnosti. Na slici 2.4 prikazane su magnetne linije strujnog pravolinijskog provodnika. Linije su koncentrični krugovi koji leže u ravni normalnoj na provodnik čiji se centri nalaze na provodniku. Smer magnetnih linija se odredjuje pravilom desne ruke. Palac desne ruke pokazuje smer struje a ostali prsti smer polja. Na slici 2.5 prikazane su linije magneta i solenoida.

Primer 1. Neka po konturama C_1, odnosno C_2 teku struje I_1 i I_2 respektivno. Pokazati da sila interakcije izmedju dva strujna elementa ne zadovoljava zakon akcije i reakcije, ali da ukupne sile koje deluju na konture zadovoljavaju ovaj zakon.



Slika 2.5: Magnetne linije štapićastog magneta i solenoida sa strujom.

Rešenje: Sila kojom strujni element $I_1 \mathrm{d}\mathbf{r}_1$ deluje na strujni element, $I_2 \mathrm{d}\mathbf{r}_2$ drugog provodnika je $\mathrm{d}\mathbf{F}_{12} = I_2 \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{B}_1$. Primenom (2.2.49) dobijamo

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \times (\mathrm{d}\mathbf{r}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \ . \tag{2.2.53}$$

Analogno, sila kojom strujni element druge konture deluje na strujni element prve konture je

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2 \mathrm{d}\mathbf{r}_1 \times (\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \ . \tag{2.2.54}$$

Razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda u brojiocu izraza (2.2.53) dobijamo

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \Big(\frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))\mathrm{d}\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \Big) \ . \tag{2.2.55}$$

Prvi član u poslednjem izrazu je totalni diferencijal, tj.

$$\mathrm{d}\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \Big(-\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_2 \Big(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \Big) \mathrm{d}\mathbf{r}_1 - \frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \Big) \ . \tag{2.2.56}$$

Očigledno je da je $\mathrm{d}\mathbf{F}_{12} \neq -\mathrm{d}\mathbf{F}_{21}$. Sila kojom prva kontura deluje na drugu je

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \Big(-\oint_{C_1} \oint_{C_2} \mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \nabla_2 \Big(\frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \Big) \mathrm{d}\mathbf{r}_1 - \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \Big) \ . \tag{2.2.57}$$

Integracija po konturi C_2 u prvom članu daje nulu, pa je

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \ . \tag{2.2.58}$$

Analogno, sila kojom drugi provodnik deluje na prvi je

$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{(\mathrm{d}\mathbf{r}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \ . \tag{2.2.59}$$

Na osnovu oblika ovih magnetostatiǩih sila je jasno da je $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$.

2.2.2 Amperova teorema

Potražimo rotor magnetne indukcije. Primenom formula (A.0.4), (2.2.52) kao i Dirak–Grinovog identiteta imamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \mathrm{graddiv}\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{grad}\int \mathrm{div}\Big(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\mathrm{d}^3r' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\triangle\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\mathrm{grad}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\nabla\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\mathrm{d}^3r' + 4\pi\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'\Big] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{grad}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\nabla\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\mathrm{d}^3r' + \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) ,
\end{aligned}
$$

gde smo iskoristili $\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}') = 0$. Ako dalje primenimo

$$\nabla\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) = -\nabla'\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) , \tag{2.2.60}$$

gde je ∇' gradijent po koordinatama vektora $\mathbf{r}'$, i ponovo formulu (A.0.4) imamo

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\Big[\mathrm{grad}\int\Big(\mathrm{div}'\Big(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}')\Big)\mathrm{d}^3r' - 4\pi\mathbf{j}(\mathbf{r})\Big] \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{grad}\oint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) \\
&= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) .
\end{aligned} \tag{2.2.61}
$$

U prethodnom izvodjenju primenili smo jednačinu kontinuiteta, uslov stacionarnosti:

$$\mathrm{div}\mathbf{j}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{r})}{\partial t} = 0 \tag{2.2.62}$$

kao i činjenicu da je zapreminska gustina struje $\mathbf{j}$ lokalizovana unutar oblasti V pa $\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\Big|_{\partial V} = 0$. Ako ovaj uslov ne bi važio onda bi na granici oblasti V gustina struje imala normalnu komponentu, tako da bi naelektrisanja prolazila kroz granicu oblasti V. U tom slučaju ∂V ne bi bila granica oblasti V.

Dakle, dobili smo

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) . \tag{2.2.63}$$

Ovo je lokalni oblik Amperove teoreme. Integracijom po nepokretnoj konturi dobijamo integralni oblik Amperove teoreme

$$\oint_L \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \mu_0 I_S , \tag{2.2.64}$$

gde je I_S jačina struje koja prolazi kroz površ oivičenu konturom L. Cirkulacija magnetne indukcije proporcionalna je sa strujom I_S.

Rezimirajmo na kraju da je magnetostatičko polje odredjeno sa vrednostima njegove divergencije i rotora:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= 0 \\
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r}) .
\end{aligned} \tag{2.2.65}
$$

2.2.3 Razlaganje vektorskog potencijala po multipolima

Neka se unutar neke ograničene oblasti V nalazi prostorno lokalizovan sistem naelektrisanja u kretanju opisan gustinom struje $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$. Vektorski potencijal na velikim rastojanjima od ovog sistema takodje se može razviti u red po multipolima. Zamenom (2.1.26) u

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' \tag{2.2.66}$$

dobijamo

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\Big(\frac{1}{r}\int \mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' + \frac{1}{r^3}\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' + \dots\Big) , \tag{2.2.67}$$

gde smo zadržali samo prva dva člana. Neka su $f(\mathbf{r})$ i $g(\mathbf{r})$ dve neprekidne funkcije. Iz Gausove teoreme

$$\int_V \mathrm{d}^3r\,\mathrm{div}(fg\,\mathbf{j}) = \oint_{\partial V} fg\,\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.2.68}$$

sledi

$$\int_V [(\nabla f)g\mathbf{j} + (\nabla g)f\mathbf{j}]\mathrm{d}^3r = 0 , \tag{2.2.69}$$

jer je $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$ i $\mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\Big|_{\partial V} = 0$. Ako u (2.2.69) uzmemo da je $f = x_i$ i $g = 1$ dobijamo

$$\int_V j_i\mathrm{d}^3r = 0 , \tag{2.2.70}$$

a ako za funkcije f i g izaberemo $f = x_i,\ g = x_k$ onda dobijamo

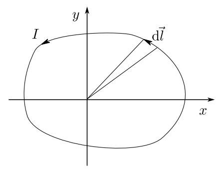
$$\int_V x_i j_k\mathrm{d}^3r = -\int_V x_k j_i\mathrm{d}^3r . \tag{2.2.71}$$

Prvi član u razvoju (2.2.67) je monopolni član i on je jednak nuli zbog (2.2.70). Zaključujemo da ne postoje magnetni monopoli. Drugi član u (2.2.67) transformisaćemo uz pomoć (2.2.71) na sledeći način

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2r^3}\Big(\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' + \int x_i x_i' j_k(\mathbf{r}')\mathbf{e}_k\mathrm{d}^3r'\Big) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2r^3}\Big(\int(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r' - \int x_i x_k' j_i(\mathbf{r}')\mathbf{e}_k\mathrm{d}^3r'\Big) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2r^3}\int \mathrm{d}^3r'\Big((\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}(\mathbf{r}') - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{r}'\Big) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{2r^3}\int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{r}'\times\mathbf{j}(\mathbf{r}'))\times\mathbf{r} .
\end{aligned} \tag{2.2.72}$$

Magnetni dipolni moment sistema je definisan sa

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r\,\mathbf{r}\times\mathbf{j} . \tag{2.2.73}$$



Slika 2.6: Strujna kontura u xOy ravni.

Drugi član u razvoju vektorskog potencijala je

$$\mathbf{A}^{(2)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{m}\times\mathbf{r}}{r^3} \ . \tag{2.2.74}$$

Najniži nenulti član u razvoju vektorskog potencijala stacionarne lokalizovane struje je dipolni član.

Odredimo magnetni moment konture sa strujom I u ravni prikazanoj na slici 2.6. Ako je ravan konture xOy ravan onda primenom formule za magnetni moment dobijamo

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}I\oint \mathbf{r}\times \mathrm{d}\mathbf{r} = IS\mathbf{n} \ , \tag{2.2.75}$$

gde je S površina konture, a $\mathbf{n}$ njen ort.

Magnetna indukcija na velikim rastojanjima od lokalizovane struje se lako nalazi iz $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Rezultat je

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} \ . \tag{2.2.76}$$

To je magnetno polje na velikim rastojanjima od dipola koji se nalazi u koordinatnom početku. Izraz (2.2.74) je vektorski potencijal magnetnog dipola, momenta $\mathbf{m}$ koji se nalazi u koordinatnom početku, dok izraz (2.2.76) zahteva korektivni član za $\mathbf{r} = 0$. Do toga dolazimo kao u prethodnom poglavlju. Podjimo od zapreminskog integrala

$$\int_{r<R}\mathbf{B}\mathrm{d}^3r = \int_{r<R}\mathrm{rot}\mathbf{A}\mathrm{d}^3r \ , \tag{2.2.77}$$

gde integralimo po kugli radijusa R sa centrom u koordinatnom početku. Primenom vektorskog identiteta (A.0.12) dobija se

$$\int_{r<R}\mathbf{B}\mathrm{d}^3r = \frac{2\mu_0}{3}\mathbf{m} \ . \tag{2.2.78}$$

Magnetno polje tačkastog dipola koji se nalazi u koordinatnom početku je

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\Big(\frac{3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - r^2\mathbf{m}}{r^5} + \frac{8\pi}{3}\mathbf{m}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\Big) \ . \tag{2.2.79}$$

2.3 Faradejev zakon elektromagnetne indukcije

Faradej je eksperimentalno otkrio zakon elektromagnetne indukcije. On je ustanovio da se u provodniku koji se nalazi u polju stalnog magneta indukuje struja ukoliko su provodnik i magnet u relativnom kretanju. Struja će se indukovati i u slučaju kada se magnet zameni sa provodnikom kroz koji prolazi stalna struja. Takodje, do pojave električne struje u prodniku doći će ukoliko se on nalazi u magnetnom polju drugog provodnika koji je nepokretan, ali kroz koji protiče promenljiva struja.

U svim ovim primerima dolazi do promene fluksa magnetnog polja, definisanog sa

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.3.80}$$

kroz konturu provodnika u kome se indukuje struja. Faradejev zakon elektromagnetne indukcije uspostavlja vezu izmedju promene fluksa magnetnog polja kroz površinu S i cirkulacija električnog polja

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{2.3.81}$$

izračunatoj po zatvorenoj konturi C koja je granica površine S, tj. $C = \partial S$. Kontura C u definiciji elektromotorne sile je nepokretna. Faradejev zakon ima jednostavan matematički oblik:

$$\mathcal{E} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}\ . \tag{2.3.82}$$

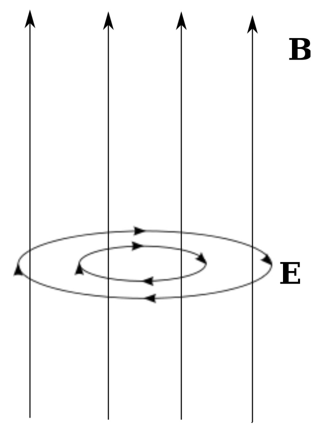
Cirkulacija električnog polja jednaka je negativnoj promeni fluksa magnetnog polja. Matematička formulacija Faradejevog zakona indukcije potiče od Maksvela. Magnetno polje čiji se fluks menja indukuje električno polje. Znak minus u (2.3.82) je vezan sa Lencovim pravilom. Ako je kontura C provodnik onda će zbog dejstva indukovanog električnog polja u provodniku teći struja koju možemo meriti. Naravno, pojava indukovanog električnog polja je nezavisna od postojanja provodnika u kome se indukuje struja. Neka je magnetno polje usmereno kao na slici 2.7 i neka raste sa vremenom. Vrtložno električno polje je prikazano na slici 2.7. Primenom Stoksove teoreme u (2.3.82) dobijamo

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{2.3.83}$$

odakle dobijamo Faradejev zakon u lokalnom obliku

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\ . \tag{2.3.84}$$

Pri kretanju konture C integralni oblik Faradejevog zakona ne važi u obliku (2.3.82), dok diferencijalni oblik Faradejevog zakon važi generalno u klasičnoj elektrodinamici. Detaljnija analiza Faradejevog zakona za pokretnu konturu biće razmatrana kasnije, u poglavlju 5.10.



Slika 2.7: Smer vrtložnog električnog polja kada magnetno polje polje raste sa vremenom.

2.4 Maksvelove jednačine

U prethodnim poglavljima izložili smo osnovne zakonitosti elektrostatičkog i magnetostatičkog polja u vakuumu, kao i Faradejev zakon koji uspostavlja vezu izmedju električnog i magnetnog polja. Zakon indukcije ukazuje nam da su električno i magnetno polje deo jedinstvenog elektromagnetnog polja.

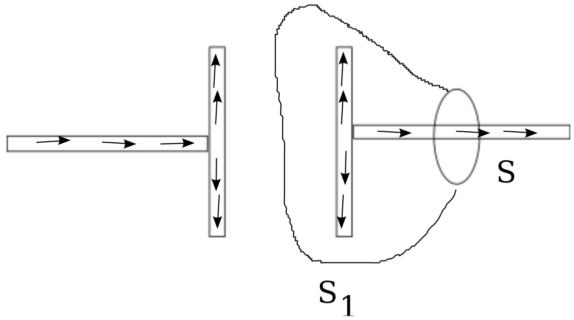
Maksvelove jednačine su jednačine koje opisuju klasično elektromagnetno polje. U ovom poglavlju pretpostavićemo da se naelektrisanja nalaze u vakuumu. Maksvelove jednačine su potvrdjene u velikom broju eksperimenata. One povezuju izvore polja: gustinu naelektrisanja $\rho(\mathbf{r},t)$ i gustinu struje $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ sa jačinama polja $\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0} && (2.4.85)\\
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0 && (2.4.86)\\
\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && (2.4.87)\\
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0\Big(\mathbf{j}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\Big)\ . && (2.4.88)
\end{aligned}$$

Odmah vidimo da su Maksvelove jednačine parcijane diferencijalne jednačine i da su lokalne i simultane. Prva od njih je Gausov zakon koji važi ne samo za elektrostatičko polje već i za promenljivo električno polje. Druga jednačina govori o bezizvornosti magnetnog polja. Treća je Faradejev zakon elektromagnetne indukcije; promenljivo magnetno polje stvara vrtložno električno polje. Četvrta jednačina je analogna Amperovom zakonu, ali sadrži jedan dodatni član,

$$\mathbf{j}_d = \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2.4.89}$$

tzv. struju pomeranja. Kretanje naelektrisanja, tj. struja provodjenja ali i struja pomeranja stvaraju vrtložno magnetno polje.



Slika 2.8: Kondenzator i Amperova teorema.

Pretpostavimo da struja pomeranja nije izvor magnetnog polja, tj. da Amperova teorema

$$\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{2.4.90}$$

važi za vremenski promenljivo magnetno polje. Razmotrimo kondenzator gde struja teče u smeru kao na slici 2.8. Neka je C kontura kružnog oblika sa centrom na provodniku postavljena daleko od kondenzatora, kao na slici 2.8. Neka su dalje površi S i S_1 izabrane tako da im je granica kontura C, tj. $\partial S=\partial S_1=C$. Primenom integralnog oblika Amperove teoreme imamo

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}=\begin{cases} \int_S \mathrm{rot}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\mu_0\int_S \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\mu_0 I \\ \int_{S_1} \mathrm{rot}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\mu_0\int_{S_1} \mathbf{j}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=0 \end{cases} . \tag{2.4.91}$$

Vidimo da rezultat zavisi od izbora površi nategnute na konturu C, tj. cirkulacija magnetne indukcije nije ista za površi S i S_1. Iz ove jednostavne analize vidimo da jednačina (2.4.90) nije korektna. Njoj nedostaje član sa strujom pomeranja.

Kada se sredina nalazi u promenljivom električnom polju dolazi do njenog polarizovanja. Pod uticajem polja naelektrisanja sredine se kreću. Nastaje tzv. polarizaciona struja. Maksvel je iskoristio ovu ideju tako što je smatrao da promenljivo električno polje uzrokuje kretanje naelektrisanih čestica u etru. Zato je, kao izvor magnetnog polja uveo struju pomeranja. Naravno, danas znamo da etar ne postoji, ali je član (2.4.89) u četvrtoj Maksvelovoj jednačini korektan.

Maksvelove jednačine su saglasne sa jednačinom kontinuiteta. Uzmimo divergenciju četvrte Maksvelove jednačine (2.4.88):

$$\mathrm{divrot}\mathbf{B}=\mu_0\mathrm{div}\Big(\mathbf{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\Big) . \tag{2.4.92}$$

Kako je $\mathrm{divrot}=0$ onda primenom prve Maksvelove jednačine imamo

$$\mathrm{div}\mathbf{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 .$$

Dobili smo jednačinu kontinuiteta. Jednačina kontinuiteta je sadržana u Maksvelovim jednačinama, ali ona može da posluži kao dadatni argument za nužnost prisustva struje pomeranja u četvrtoj Maksvelovoj jednačini. Iz ovog izvodjenja se još vidi i da je polje $\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ bezizvorno, tj. da su njegove linije zatvorene.

Maksvelove jednačine su linearne tako da važi princip superpozicije. Ako izvori $\rho_1, \mathbf{j}_1$ generišu polje $\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1$, a izvori $\rho_2, \mathbf{j}_2$ generišu polje $\mathbf{E}_2, \mathbf{B}_2$ onda izvori $\rho_1 + \rho_2, \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$ generišu polje $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$.

Neka su u nekoj oblasti prostora nemamo naelektrisanih čestica, tj. neka je $\rho = 0$ i $\mathbf{j} = 0$. Uzmimo rotor četvrte Maksvelove jednačine. Primenom vektorskog identiteta (A.0.9) i treće Maksvelove jednačine dobijamo:

$$\mathrm{graddiv}\mathbf{B} - \triangle\mathbf{B} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \ . \tag{2.4.93}$$

Konačno, korišćenjem druge Maksvelove jednačine dobijamo

$$\triangle\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{2.4.94}$$

Slično uzimanjem rotora treće Maksvelove jednačine dobijamo

$$\triangle\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{2.4.95}$$

Dobili smo talasne jednačine. U oblasti prostora gde su odsutni izvori u vakuumu postoji elektromagnetni talas. To je svetlost. Fazna brzna elektromagnetnog talasa u vakuumu je

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 3.10^8 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \ .$$

Herz je dokazao postojanje elektromagnetnih talasa. Ovaj eksperiment je definitivno potvrdio Maksvelove jednačine.

Primer 1. Kondenzator se sastoji od dve paralelne kružne ploče poluprečnika a, koje su na rastojanju d. Kondenzator se nalazi na nekom naponu, a zatim počinje njegovo razaelektrisavanje preko otpornika. Struja u kolu je oblika $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, gde su I_0 i τ konstante. Zanemarujući efekte krajeva odrediti električno i megnetno polje unutar kondenzatora. Smatrati da je veličina $\frac{a}{\tau c}$ mala.

Rešenje: Električno i magnetno polje zadovoljavaju jednačine (2.4.95), odnosno (2.4.94). Radićemo u cilindričnim koordinatama, gde je $z-$osa usmerena duž ose simetrije kondenzatora. Radijalnu koordinatu ćemo obeležiti sa r. Na osnovu geometrije problema jasno je da polja imaju oblik:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E(r)e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_z \ , \\ \mathbf{B} &= B(r)e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_\varphi \ . \end{aligned} \tag{2.4.96}$$

Talasna jednačina za električno polje daje

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} - \frac{1}{c^2\tau^2}E = 0 \ . \tag{2.4.97}$$

Rešenje gornje jednačine tražićemo u obliku stepenog rada

$$E(r) = \sum_{k=0}^{\infty} E_k r^k ,$$

gde su E_k koeficijenti. Zamenom ovog rešenja u diferencijalnu jednačinu dobijamo

$$E_{k+2} = \frac{E_k}{c^2\tau^2(k+2)^2} ,$$

što daje

$$E(r) = E_0\Big(1 + \frac{r^2}{4\tau^2c^2} + \frac{r^4}{4^3(c^2\tau^2)^2} + \dots\Big) + E_1\Big(r + \frac{r^3}{9c^2\tau^2} + \dots\Big) .$$

Iz treće Maksvelove jednačine sledi

$$B(r) = -\tau\frac{\mathrm{d}E(r)}{\mathrm{d}r} ,$$

odnosno

$$B(r) = -\tau E_0\Big(\frac{r}{2\tau^2c^2} + \frac{r^3}{4^2(c^2\tau^2)^2} + \dots\Big) - \tau E_1\Big(1 + \frac{r^2}{3c^2\tau^2} + \dots\Big) .$$

U najnižem redu $E(r)$ treba da bude konstantno, a $B(r)$ linearno po r. Iz ovog zahteva sledi $E_1 = 0$. Površinska gustina naelektrisanja na kondenzatoru je

$$\sigma = \epsilon_0 E(r)e^{-\frac{t}{\tau}} = \epsilon_0 E_0\Big(1 + \frac{r^2}{4\tau^2c^2} + \frac{r^4}{4^3(c^2\tau^2)^2} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{\tau}} .$$

Naelektrisanje kondenzatora je $q = 2\pi\int_0^\infty \mathrm{d}r r\sigma(r)$. Iz uslova $\dot{q} = -I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ odredjujemo konstantu E_0. Njena vrednosti je

$$E_0 = \frac{\tau I_0}{\pi\epsilon_0 a^2}\frac{1}{1 + \frac{a^2}{8c^2\tau^2} + \frac{a^4}{3\cdot 4^3c^4\tau^4} + \dots} .$$

Prema tome, električno polje je

$$\mathbf{E} = \frac{\tau I_0}{\pi\epsilon_0 a^2}\frac{1 + \frac{r^2}{4\tau^2c^2} + \frac{r^4}{4^3(c^2\tau^2)^2} + \dots}{1 + \frac{a^2}{8c^2\tau^2} + \frac{a^4}{3\cdot 4^3c^4\tau^4} + \dots}e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_3 , \qquad (2.4.98)$$

dok je magnetno polje

$$\mathbf{B} = -\frac{\tau^2 I_0}{\pi\epsilon_0 a^2}\frac{\frac{r}{2\tau^2c^2} + \frac{r^3}{4^2(c^2\tau^2)^2} + \dots}{1 + \frac{a^2}{8c^2\tau^2} + \frac{a^4}{3\cdot 4^3c^4\tau^4} + \dots}e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_\varphi . \qquad (2.4.99)$$

Aproksimaciojom gornjih izraza dobijamo

$$\mathbf{E} = \frac{\tau I_0}{\pi\epsilon_0 a^2}\Big(1 + \frac{r^2}{4\tau^2c^2} - \frac{a^2}{8c^2\tau^2} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_3 , \qquad (2.4.100)$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\tau^2 I_0}{\pi\epsilon_0 a^2}\Big(1 + \frac{r}{2\tau^2c^2} + \dots\Big)e^{-\frac{t}{\tau}}\mathbf{e}_\varphi . \qquad (2.4.101)$$

2.5 Samousaglašeno odredjivanje EMP u vakuumu

Naelektrisanja i struje odredjuju elektromagnetno polje, ali i polje utiču na kretanje naelektrisanih čestica tako da izvore i polja treba odredjivati samousaglašeno. Posmatrajmo sistem od N naelektrisanih čestica. Zapreminska gustina naelektrisanja je data sa

$$\rho(\mathbf{r},t)=\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)) \ , \tag{2.5.102}$$

zapreminska gustina struje je

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t)=\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t)) \ . \tag{2.5.103}$$

Oni zadovoljavaju jednačinu kontinuiteta. Maksvelove jednačine imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t))\\
\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= 0\\
\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
\mathrm{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0\Big(\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha(t))+\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\Big) \ .
\end{aligned} \tag{2.5.104}$$

Ovaj skup jednačina treba dopuniti jednačinama kretanja čestica

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_\alpha}{\mathrm{d}t}=q_\alpha(\mathbf{E}_\alpha+\mathbf{v}_\alpha\times\mathbf{B}_\alpha), \quad \alpha=1,\dots,N \ . \tag{2.5.105}$$

Polja i čestice su odredjene sa ukupno $3N+8$ jednačinom. Sa druge strane, nepoznate veličine su $\mathbf{E}(\mathbf{r},t), \mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ i $\mathbf{r}_\alpha=\mathbf{r}_\alpha(t)$. Broj nepoznatih veličina je $3N+6$. Odmah primećujemo da je broj jednačina veći od broja nepoznatih i to za dva. Postavlja se pitanje da li je sistem jednačina kretanja predefinisan jer postoje dve jednačine viška. Pokazaćemo da su te dve jednačine zapravo početni uslovi pa je broj jednačina isti kao i broj nepoznatih. Ako uzmemo divergenciju četvrte Maksvelove jednačine i primenimo jednačinu kontinuiteta dobijamo

$$\begin{aligned}
0 &= \mu_0 \mathrm{div}(\mathbf{j}+\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t})\\
&= \mu_0(-\frac{\partial \rho}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial(\mathrm{div}\mathbf{E})}{\partial t})\\
&= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 \mathrm{div}\mathbf{E}-\rho) \ .
\end{aligned}$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da je izraz $F\equiv\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\rho(\mathbf{r},t)$ nezavisan od vremena, i jednak je vrednosti ovog izraza u početnom trenutku

$$\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\rho(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r},t_0)-\rho(\mathbf{r},t_0) \ ,$$

gde je t_0 početni trenutak. Prva Maksvelova jednačina onda fiksira $F(x,y,z) = 0$. Slično uzimajući divergenciju treće Maksvelove jednačine dobijamo da je

$$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = G(x,y,z) = \mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{r},t_0)$$

Druga Maksvelova jednačina fiksira $G(\mathbf{r}) = 0$. Ovim smo pokazali da od osam jednačina polja dve nisu dinamičke već predstavljaju početne uslove.

Bez obzira što smo rekli da polja i naelektrisanja utiču i odredjuju jedni druge, u praksi, pri rešavanju elektrodinamičkih problema se primenjuju dve aproksimacije. Prva je aproksimacija zadatih gustina. U ovoj aproksimaciji smatramo da su gustine naelektrisanja i struja $\rho(\mathbf{r},t), \mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ poznate veličine. Rešavanjem Maksvelovih jednačina nalazimo polja. Dakle, u ovoj aproksimaciji smatramo da sama polja ne utiču na izvore. Druga aproksimacija je aproksimacija zadatih polja. U ovoj aproksimaciji polja su zadata pa iz Maksvelovih jednačina nalazimo gustine naelektrisaja.

2.6 Potencijali elektromagnetnog polja u vakuumu

Pri analizi statičkih polja uveli smo skalarni i vektorski potencijal. Medjutim, na osnovu bezizvornih Maksvelovih jednačina možemo uvesti skalarni i vektorski potencijal za proizvoljno elektromagnetno polje. Iz druge Maksvelove jednačine, $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ sledi $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$, jer je $\mathrm{divrot} \equiv 0$. Zamenom $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ u treću Maksvelovu jednačinu (2.4.87) imamo

$$\mathrm{rot}\Big(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) = 0 \ ,$$

pa je

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi$$

jer je $\mathrm{rotgrad} \equiv 0$. Dakle, jačinu električnog polja i magnetnu indukciju možemo izraziti preko potencijala ϕ i $\mathbf{A}$ prema

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} \qquad (2.6.106)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \ . \qquad (2.6.107)$$

Potencijali su funkcije vektora položaja i vremena. Šest funkcija $E_x, \ldots, B_z$, koje opsiju elektromagnetno polje zamenjujemo sa četiri funkcije: ϕ, A_x, A_y i A_z. Broj komponenti potencijala je za dva manji nego broj komponenti polja, jer smo polja moraju zadovoljavati drugu, odnosno treću Maksvelovu jednačinu.

2.6.1 Jednačine za potencijale

Zamenom izraza (2.6.107) u prvu Maksvelovu jednačinu, dobijamo

$$\triangle\phi + \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A} = -\rho/\varepsilon_0 \ . \qquad (2.6.108)$$

Zamenom (2.6.106) i (2.6.107) u četvrtu Maksvelovu jednačinu imamo

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j} - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\Big(\bigtriangledown \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Big) \tag{2.6.109}$$

odnosno

$$\triangle \mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mathrm{grad}\Big(\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\Big) = -\mu_0 \mathbf{j}\ . \tag{2.6.110}$$

Jednačine za potencijale (2.6.108) i (2.6.110) su parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Ove jednačine su kuplovane, jer se skalarni i vektorski potencijal pojavljuju u obe jednačine.

2.6.2 Kalibraciona (gradijentna) simetrija

Neka potencijali ϕ i $\mathbf{A}$ opisuju elektromagnetno polje. Uvedimo nove potencijale ϕ' i $\mathbf{A}'$ definisane sa

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \nabla \Lambda\ , \end{aligned} \tag{2.6.111}$$

gde je $\Lambda = \Lambda(\mathbf{r}, t)$ proizvoljna funkcija. Transformacije potencijala (2.6.111) nazivaju se kalibracionim (gradijentnim[3]) transformacijama. Novi potencijali opisuju isto elektromagnetno polje kao i polazni potencijali ϕ i $\mathbf{A}$. Ovo se lako proverava:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla\phi' = \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda - \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Lambda = \mathbf{E} \\ \mathbf{B}' &= \mathrm{rot}(\mathbf{A} - \nabla\Lambda) = \mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}\ . \end{aligned} \tag{2.6.112}$$

Jačina električnog polja i magnetna indukcija su invarijantne na kalibracione transformacije. Polja su opservabilne veličine, pa zaključujemo da je elektrodinamika kalibraciono invarijantna teorija[4]. Kalibraciona simetrija je osnova za razumevanje sve četiri interakcije u prirodi.

Potencijali su dakle nejednoznačni. Odredjeni su do na kalibracione transformacije. Stoga je moguće nametnuti neki uslov na potencijale, tj. fiksirati kalibraciju. Potrebno je proveriti da se kalibracioni uslov može nametnuti, tj. da li sa potencijala koji ne zadovoljavaju dati kalibracioni uslov možemo, kalibracionom transformacijom, preći na nove potencijale koji su u datoj kalibraciji.

Najčešće se koriste Lorencov i Kulonov kalibracioni uslov. Lorencov uslov je

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0\ . \tag{2.6.113}$$

Kasnije ćemo pokazati da je ovaj uslov Lorenz invarijantan. Jednačine za potencijale u Lorencovoj kalibraciji imaju oblik

$$\begin{aligned} \triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j}\ . \end{aligned} \tag{2.6.114}$$

[3]Engleski termin za ove transformacije je 'gauge'.
[4]Potencijali nisu opservabilni u klasičnoj elektrodinamici.

Vidimo da su jednačine za potencijale razdvojene. Sada ćemo pokazati da je Lorencov kalibracioni uslov moguće nametnuti na potencijale $(\phi, \mathbf{A})$. Neka polazni potencijali ne zadovoljavaju Lorencov kalibracioni uslov, tj. neka je

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = \Psi(t, \mathbf{r}) \neq 0 \ .$$

Kalibracionom transformacijom potencijali $(\phi, \mathbf{A})$ prelaze u nove potencijale $(\phi', \mathbf{A}')$ za koje zahtevamo da zadovoljavaju Lorencov kalibracioni uslov:

$$0 = \mathrm{div}\mathbf{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi'}{\partial t} = \mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} - \left(\triangle\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2}\right) \ .$$

Gornja jednačina postaje

$$\triangle\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = \Psi \ .$$

Ovo je nehomogena Dalamberova jednačina. Iz teorije diferencijalnih jednačina je poznato da ona ima rešenja. Time smo pokazali da je uvek moguće nametnuti Lorencovu kalibraciju. Primetimo da kada fiksiramo Lorencov gauge možemo i dalje vršiti kalibracione transformacije sa funkcijama Λ koja zadovoljavaju

$$\triangle\Lambda - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial t^2} = 0 \ .$$

Ova dopunska simetrija, preostala nakon fiksiranja kalibracije, naziva se rezidualnom simetrijom.

Kulonov kalibracioni uslov je dat sa

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \ .$$

Jednačine za potencijale u ovoj kalibraciji postaju

$$\triangle\phi(\mathbf{r}, t) = -\rho(\mathbf{r}, t)/\varepsilon_0 \qquad (2.6.115)$$

$$\triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t} \ . \qquad (2.6.116)$$

Jednačine za potencijale u Kulonovoj kalibraciji su spregnute jer se skalarni potencijal pojavljuje u obe jednačine. Jednačina (2.6.115) ima isti oblik kao Poasonova jednačina za elektrostatički potencijal. Medjutim u (2.6.115) se pojavljuje vreme. Rešenje jednačine (2.6.115) je

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \qquad (2.6.117)$$

Potencijal (2.6.117) je tzv. trenutni Kulonov potencijal, jer potencijal i gustina naelektrisanja koja ga je generisala su u istom trenutku t. Primenom (2.6.117) i jednačine kontinuiteta jednačina (2.6.116) postaje

$$\begin{aligned} \triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial^2 t} &= -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\nabla\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\mu_0 \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\nabla\int \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi}\mathrm{rotrot}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ . \qquad (2.6.118) \end{aligned}$$

Prelaz sa drugog na treći red u (2.6.118) je netrivijalan. Proverićemo ga tako što ćemo krenuti od izraza u trećem redu. Primenom (A.0.9), Dirak-Grinovog identiteta i (A.0.4) imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrot}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \mathrm{graddiv}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \triangle\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ &= \nabla\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\nabla\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' + 4\pi\mathbf{j}\ . \end{aligned} \tag{2.6.119}$$

Zamenom gradijenta po koordinatama vektora $\mathbf{r}$ sa gradijentom po koordinatama vektora $\mathbf{r}'$, tj. (2.2.60) i izraza (A.0.4) imamo

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrot}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= -\nabla\int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\nabla'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' + 4\pi\mathbf{j} \\ &= -\nabla\int_V \mathrm{div}'\Big(\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\mathrm{d}^3r' + \nabla\int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + 4\pi\mathbf{j}\ . \end{aligned}$$

Gausova teorema daje

$$\begin{aligned} \mathrm{rotrot}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= -\nabla\Big(\oint_{\partial V} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r'\Big) + 4\pi\mathbf{j} \\ &= \nabla\int \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' + 4\pi\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\ . \end{aligned} \tag{2.6.120}$$

Rezultat (2.6.120) ćemo prepisati u obliku

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' + \frac{1}{4\pi}\mathrm{rotrot}\int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ . \tag{2.6.121}$$

Vektorsko polje $\mathbf{j}$ smo u (2.6.121) razložili u dve komponente. Prvi sabirak

$$\mathbf{j}_L = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V \frac{\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3r' \tag{2.6.122}$$

zadovoljava uslov $\mathrm{rot}\mathbf{j}_L = 0$. Ova komponenta vektora gustine struje naziva se longitudinalnom (ili bezvrtložna) komponentom vektorskog polja. Druga komponenta,

$$\mathbf{j}_T = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rotrot}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t)\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.6.123}$$

je tzv. transverzalna (solenoidna) komponenta. Ona zadovoljava uslov $\mathrm{div}\mathbf{j}_T = 0$. Ovim smo pokazali Helmholcovu teoremu, po kojoj se svako vektorsko polje može razložiti na transverzalnu i longitudinalnu komponentu.

Jednačina (2.6.118) je dakle

$$\triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial^2 t} = -\mu_0\mathbf{j}_T\ . \tag{2.6.124}$$

Sa desne strane ove jednačine figuriše samo transverzalna komponenta gustine struje. Kulonov gauge se često naziva transverzalnim kalibracionim uslovom.

Glava 3

Elektromagnetno polje u sredini

U prethodnoj glavi formulisali smo jednačine za elektromagnetno polje naelektrisanja koje se nalaze u vakuumu. U ovoj glavi naći ćemo jednačine za polje naelektrisanih čestica u prisustvu sredine. Drugo poglavlje je posvećeno elektrodinamičkim jednačinama koje opisuju sredine, a treće graničnim uslovima.

3.1 Maksvel–Lorencove jednačine za polje u sredinama

Elektromagnetno polje u sredini generišu naelektrisanja te sredine kao i naelektrisanja uneta u tu sredinu. Mikroskopska gustina naelektrisanja $\eta(\mathbf{r}, t)$, odnosno struje $\mathbf{k}(\mathbf{r}, t)$ sredine su brzo fluktuirajuće funkcije kako u prostoru tako i u vremenu. Sva naelektrisanja, dakle spoljna i unutrašnja, generišu mikropolja: mikroskopsko električno polje $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$ i mikroskopsku magnetnu indukciju $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$. Mikropolja su takodje brzo fluktuirajuće funkcije. Karakteristike mikropolja zavise od sredine. Potpuno su različite npr. u plazmi i u kristalu. Vremenske fluktuacije mikropolja variraju od 10^{-13}s za vibracije jezgara do 10^{-17}s, što odgovara elektronskom orbitalnom kretanju. Prostorne fluktuacije su reda 10^{-10}m ili manje. Uzimajući da se sva naelektrisanja prisutna u sredini, dakle naelektrisanja sredine i spolja uneta naelektrisanja, nalaze u vakuumu možemo napisati Maksvelove jednačine za mikropolja:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\varepsilon_0 \mathbf{e}) = \eta + \rho_{\mathrm{ext}} \\
&\mathrm{div}\mathbf{b} = 0 \\
&\mathrm{rot}\mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\
&\mathrm{rot}\Big(\frac{\mathbf{b}}{\mu_0}\Big) = \mathbf{k} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}\ .
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Indeks ext se odnosi na spolja uneta naelektrisanja. Da bismo imali kompletan sistem jednačina, jednačinama za polje moramo dodati jednačine kretanja naelektrisanih čestica:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}_\alpha}{\mathrm{d}t} = q_\alpha(\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{b}_\alpha), \quad \alpha = 1, \ldots, N \tag{3.1.2}$$

gde je N je reda veličine 10^{23}. Iz ovog sistema jednačina ne možemo izvući neku značajnu informaciju. Čak i kad bismo uspeli da rešimo jednačine ne znamo početne uslove, tj. početne položaje i brzine sveke čestice.

Mikroskopska polja kao i mikroskopska gustine naelektrisanja i struje su neopservabilne veličine. Makroskopske veličine se dobijaju usrednjavanjem mikroskopskih. Usrednjavanje se vrši po prostoru i vremenu. U eksperimentima se ne meri polje u tački $\mathbf{r}$, već srednje polje unutar oblasti ΔV oko tačke $\mathbf{r}$. Slično, mikroskopske veličine usrednjavamo po vremenu. Vrednost makroskopske veličine u trenutku t je srednja vrednost odgovarajuće mikroskopske veličine u vremenskom intervalu $(t-\frac{\Delta t}{2}, t+\frac{\Delta t}{2})$. Veličine ΔV i Δt su veće od skale vezane za mikroskopske fluktuacije, ali dosta manje od makroskopske skale. Usrednjavanjem dobijamo makroskopske veličine koje su glatke funkcije.

Makroskopsko električno polje, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ je srednja vrednost mikroskopskog polja, $\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = \frac{1}{\Delta t \Delta V}\int_{\Delta V} \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \mathrm{d}t' \mathbf{e}(\mathbf{r}+\mathbf{r}', t+t') \ . \tag{3.1.3}$$

Slično se definišu srednje vrednosti ostalih mikroskopskih veličina. Makroskopsko magnetno polje je $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)\rangle$.

Jasno je da parcijalni izvodi komutiraju sa usrednjavanjem:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\right\rangle \tag{3.1.4}$$

i slično

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{e}(\mathbf{r}, t)\right\rangle \ . \tag{3.1.5}$$

Posle usrednjavanja mikroskopskih jednačina (3.1.1) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \langle \eta\rangle + \rho_{\mathrm{ext}}\\
&\mathrm{div}\mathbf{B} = 0\\
&\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\
&\mathrm{rot}\Big(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}\Big) = \langle \mathbf{k}\rangle + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ ,
\end{aligned}$$

gde su $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ makroskopska jačina električnog polja, odnosno makroskopska magnetna indukcija, a $\langle \mathbf{k}\rangle$ i $\langle \eta\rangle$ su makroskopske gustine struje i naelektrisanja. Makroskopske gustine naelektrisanja i struje su funkcije makroskopskih polja.

Unutrašnja naelektrisanja ćemo podeliti na slobodna i vezana. Slobodna naelektrisanja se kreću po celom telu. Vezana naelektrisanja su lokalizovana u atomu, molekulu ili jonu sredine.[1] U metalima postoje slobodni elektroni; joni i elektroni su slobodna naelektrisanja u plazmi, joni su takodje slobodna naelektrisanja u elektrolitu. Mikroskopska gustina unutrašnjih naelektrisanja je

$$\eta = \eta_{\mathrm{sl}} + \eta_{\mathrm{vez}} \ , \tag{3.1.6}$$

[1] Ova podela je uslovna, npr. u brzo promenljivom polju sva naelektrisanja se ponašaju kao vezana.

dok je mikroskopska gustina struje

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\rm sl} + \mathbf{k}_{\rm vez} \ . \tag{3.1.7}$$

Indeksi sl, odnosno vez označavaju o kakvim naelektrisanjima se radi. Srednje vrednosti ovih gustina su

$$\begin{aligned} \langle \eta(\mathbf{r},t) \rangle &= \langle \eta_{\rm sl}(\mathbf{r},t) \rangle + \langle \eta_{\rm vez}(\mathbf{r},t) \rangle \\ \langle \mathbf{k}(\mathbf{r},t) \rangle &= \langle \mathbf{k}_{\rm sl}(\mathbf{r},t) \rangle + \langle \mathbf{k}_{\rm vez}(\mathbf{r},t) \rangle \ . \end{aligned}$$

Mikroskopska gustina slobodnih naelektrisanja je

$$\eta_{\rm sl} = \sum_{j \in {\rm sl}} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \ , \tag{3.1.8}$$

gde sumiranje vršimo po slobodnim naelektrisanjima. Mikroskopska gustina vezanih naelektrisanja je

$$\eta_{\rm vez} = \sum_n \eta_n(\mathbf{r},t) \ , \tag{3.1.9}$$

gde je $\eta_n(\mathbf{r},t)$ gustina naelektrisanja $n-$tog molekula (ili 'ćelije' tela; atoma, jona,..). Gustina naelektrisanja $n-$tog molekula je

$$\begin{aligned} \eta_n(\mathbf{r},t) &= \sum_{j \in n} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \\ &= \sum_{j \in n} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{nj}(t)) \ , \end{aligned}$$

gde je $\mathbf{r}_n$ radijus vektor centra mase $n-$tog molekula, $\mathbf{r}_{nj}$ je radijus vektor naelektrisanja q_j koje pripada $n-$tom molekulu, u odnosu na njegov centar mase. Ove oznake su predstavljene na slici 3.1. Polarizacija, $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$ je definisana kao dipolni moment jedinične zapremine

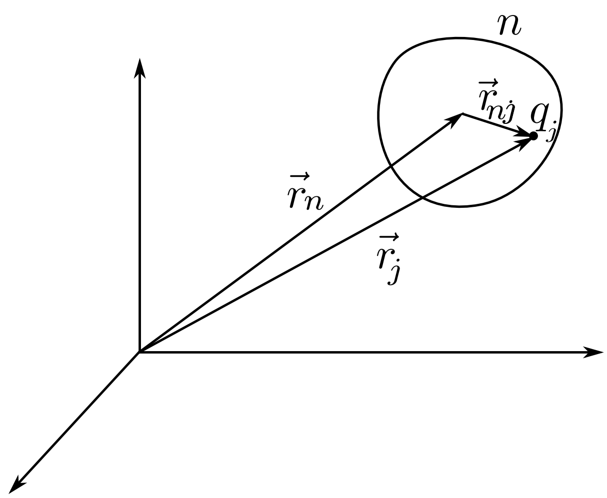
$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \frac{\sum_{n \in \Delta V} \mathbf{p}_n}{\Delta V} \ . \tag{3.1.10}$$

U prethodnoj formuli sumira se po dipolnim momentima koji su u okolini tačke $\mathbf{r}$ u trenutku t. Molekule ćemo smatrati tačkastim dipolima. Vektor položaja molekula indeksa n je $\mathbf{r}_n$, a njegov dipolni moment je $\mathbf{p}_n$. Mikroskopska polarizacija sistema tačkastih dipola je

$$\boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t) = \sum_n \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \ . \tag{3.1.11}$$

Usrednjavanjem mikroskopske polarizacije dobijamo makroskopsku polarizaciju:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \langle \boldsymbol{\pi}(\mathbf{r},t) \rangle = \left\langle \sum_n \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \right\rangle \ . \tag{3.1.12}$$



Slika 3.1: Molekul indeksa n i položaji njegovih naelektrisanja.

Makroskopsku polarizaciju zvaćemo samo polarizacijom. Gustina vezanih naelektrisanja je srednja vrednost mikroskopske gustine vezanih naelektrisanja, tj.

$$\rho_{\text{vez}} = \left\langle \sum_n \eta_n \right\rangle = \left\langle \sum_n \sum_{j\in n} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n-\mathbf{r}_{nj}) \right\rangle \ . \tag{3.1.13}$$

Ako dalje delta funkciju formalno razvijemo u red, smatrajući da je $|\mathbf{r}_{nj}| \ll |\mathbf{r}_n|$, imamo

$$\begin{aligned} \rho_{\text{vez}} &= \left\langle \sum_n \Big(\sum_{j\in n} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) - \sum_{j\in n} q_j \mathbf{r}_{nj}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)) + \dots \Big) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \right\rangle - \left\langle \sum_n \mathbf{p_n}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)) \right\rangle + \dots \ . \end{aligned} \tag{3.1.14}$$

Članove kvadratne po dimenzijama molekula smo zanemarili. Primenom (A.0.4), dalje imamo

$$\begin{aligned} \rho_{\text{vez}} &= \left\langle \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \right\rangle - \text{div} \left\langle \sum_n \mathbf{p_n}\cdot\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)) \right\rangle + \dots \\ &= \left\langle \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \right\rangle - \text{div}\mathbf{P} \ . \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

Molekule (odnosno atome, jone,..) karakterišemo sa njihovim ukupnim naelektrisanjem i dipolnim momentom. Sledeća korekcija bi bio kvadrupolni moment, ali taj član nismo uključili. Sa q_n obeležili smo naelektrisanje $n-$tog molekula. Ako je molekul elektroneutralan onda je prvi član u krajnjem rezultatu u (3.1.15) jednak nuli.

Ukupna srednja vrednost mikroskopske gustine naelektrisanja je

$$\begin{aligned}\langle\eta\rangle &= \rho_{\rm sl} + \left\langle \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \right\rangle - {\rm div}\mathbf{P} \\ &= \rho - {\rm div}\mathbf{P}, \end{aligned} \tag{3.1.16}$$

gde je

$$\rho = \left\langle \sum_{j,{\rm sl}} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t)) \right\rangle + \left\langle \sum_n q_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n) \right\rangle \tag{3.1.17}$$

makroskopska gustina naelektrisanja. Ona se sastoji od dva sabirka. Prvi je srednja vrednost mikroskopskog slobodnog naelektrisanja, a drugi se dobija usrednjavanjem gustine vezanih naelektrisanja molekula smatrajući da su molekuli tačkasti.

U metalima postoje slobodni elektroni, zatim vezani elektroni i nepokretni pozitivno naelektrisani joni u čvorovima metalne rešetke. Zbir prvog i drugog člana u (3.1.17), za metale jednak je nuli, jer je sredina elektroneutralna. Dakle, makroskopska gustina naelektrisanja provodne sredine je jednaka nuli. Da bi makroskopska gustina naelektrisanja, ρ bila različita od nule nije dovoljno da se naelektrisanja sredine mogu slobodno kretati u njoj, tj. nije dovoljno da postoje slobodna naelektrisanja. Ova nelektrisanja ne smeju biti ekrenirana vezanim naelektrisanjima jona. U dielektričnim sredinama nema slobodnih naelektrisanja pa je prvi sabirak u (3.1.17) jednak nuli. Molekuli sredine su elektroneuralni, pa je i drugi sabirak jednak nuli. Neutralnost sredine u oba slučaja se narušava dodavanjem spoljnih naelektrisanja. U literaturi se često ρ identifikuje sa $\rho_{\rm sl}$ što nije tačno. Ukoliko su molekuli sredine elektroneutralni tada je $\rho = \rho_{\rm sl}$.

Magnetni dipolni moment date raspodele naelektrisanja

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int {\rm d}^3 r\, \mathbf{r}\times\mathbf{j}(\mathbf{r},t) \tag{3.1.18}$$

za sistem tačkastih naelektrisanja postaje

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum_\alpha q_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha\ . \tag{3.1.19}$$

Magnetizacija se definiše slično kao polarizacija:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \frac{\sum_{n\in\Delta V}\mathbf{m}_n}{\Delta V}. \tag{3.1.20}$$

Ona je suma magnetnih dipolnih momenata po jedinici zapremine. Za sistem tačkastih magnetnih dipola izražena je preko delta funkcije

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \sum_\alpha \mathbf{m}_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a(t))\ . \tag{3.1.21}$$

Mikroskopska magnetizacija sredine je

$$\boldsymbol{\mu}(\mathbf{r},t) = \sum_n \mathbf{m}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\ . \tag{3.1.22}$$

U prethodnoj formuli $\mathbf{m}_n$ je magnetni dipolni moment $n-$tog molekula. Srednja vrednost mikroskopske magnetizacije je makroskopska magnetizacija (koju ćemo zvati magnetizacijom)

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) = \langle \boldsymbol{\mu}(\mathbf{r},t)\rangle \ . \tag{3.1.23}$$

Neka je $\mathbf{v}_n$ brzina $n-$tog molekula, a $\mathbf{v}_{ni} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_{ni}}{\mathrm{d}t}$ brzina i-tog naelektrisanja koje pripada $n-$tom molekulu u odnosu na centar mase molekula. Jasno je da je brzina $i-$tog naelektrisanja koje pripada $n-$tom molekulu data sa $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{ni}$. Srednja vrednost mikroskopske gustine struje vezanih naelektrisanja je

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{\mathrm{vez}}(\mathbf{r},t) &= \langle \mathbf{k}_{\mathrm{vez}}(\mathbf{r},t)\rangle = \sum_n \langle \mathbf{k}_n(\mathbf{r},t)\rangle \\
&= \left\langle \sum_n \sum_{i\in n} q_i(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{ni})\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t) - \mathbf{r}_{ni}(t)) \right\rangle \\
&= \sum_n \sum_{i\in n} \left\langle q_i(\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_{ni})(\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) - \mathbf{r}_{ni}\cdot\nabla\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)))\right\rangle \\
&+ \ \ldots\ ,
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

gde smo delta funkciju razvili u red. Sredjivanjem gornjeg izraza imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}_{\mathrm{vez}}(\mathbf{r},t) &= \sum_n \sum_{i\in n} \left\langle q_i\mathbf{v}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))\right\rangle + \left\langle q_i\mathbf{v}_{ni}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))\right\rangle \\
&- \left\langle \sum_n \sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_n(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)))\right\rangle \\
&- \left\langle \sum_n \sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)))\right\rangle \ .
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Dobili smo četiri člana i svaki od njih ćemo analizirati posebno. Prvi član je

$$\sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) = q_n\mathbf{v}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \ . \tag{3.1.26}$$

Za elektroneutralne molekule ovaj član je jednak nuli. Drugi sabirak je

$$\begin{aligned}
\sum_n \sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_{ni}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) &= \sum_n \dot{\mathbf{p}}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_n \mathbf{p}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))\Big) \\
&- \sum_n \mathbf{p}_n(-\mathbf{v}_n\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_n(t))) \ .
\end{aligned}$$

Poslednji član je reda brzine molekula i možemo ga zanemariti, jer je $|\mathbf{v}_{ni}| \gg |\mathbf{v}_n|$. Treći sabirak se takodje može zanemariti iz istog razloga. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned}\sum_{i\in n} q_i \mathbf{v}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{i\in n} q_i\mathbf{r}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\Big)\\ &- \sum_{i\in n} q_i\mathbf{r}_{ni}(\mathbf{v}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\\ &- \sum_{i\in n} q_i\mathbf{r}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big(\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\Big)\\ &\approx -\sum_{i\in n} q_i\mathbf{r}_{ni}(\mathbf{v}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\ , \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

gde smo članove kvadratne po dimenziji molekula zanemarili. Prilikom razvijanje delta funkcije u red zadržavali smo linearne članove po $\mathbf{r}_{ni}$. Koristeći (3.1.27) četvrti član u (3.1.25) se transformiše prema

$$\begin{aligned} &- \sum_n\sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\\ = &- \frac{1}{2}\sum_n\sum_{i\in n} q_i\mathbf{v}_{ni}(\mathbf{r}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))) + \frac{1}{2}\sum_n\sum_{i\in n} q_i\mathbf{r}_{ni}(\mathbf{v}_{ni}\cdot\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\\ &= \frac{1}{2}\sum_n\sum_{i\in n} q_i\bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\times(\mathbf{r}_{ni}\times\mathbf{v}_{ni})\\ &= \sum_n \bigtriangledown\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\times\mathbf{m}_n\\ &= \sum_n \mathrm{rot}(\mathbf{m}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t)))\ . \end{aligned} \tag{3.1.28}$$

U pretposlednjem koraku primenili smo (A.0.7).

Sabirajući sve članove dobijamo mikroskopsku gustinu vezanih naelektrisanja

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{\mathrm{vez}} &= \sum_n q_n\mathbf{v}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\\ &+\frac{\partial}{\partial t}\Big(\sum_n \mathbf{p}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\Big) + \mathrm{rot}\Big(\sum_n \mathbf{m}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\Big)\ . \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

Usrednjavanjem mikroskopske gustine struje dobijamo

$$\begin{aligned}\langle\mathbf{k}\rangle &= \langle\mathbf{k}_{\mathrm{sl}}+\mathbf{k}_{\mathrm{vez}}\rangle\\ &= \sum_{i\in\mathrm{sl}}\big\langle q_i\mathbf{v}_i\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))\big\rangle + \sum_n\big\langle q_n\mathbf{v}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\big\rangle\\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left\langle\Big(\sum_n \mathbf{p}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\Big)\right\rangle + \mathrm{rot}\left\langle\Big(\sum_n \mathbf{m}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\Big)\right\rangle\\ &= \mathbf{j}+\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}+\mathrm{rot}\mathbf{M}\ , \end{aligned} \tag{3.1.30}$$

gde je

$$\mathbf{j} = \sum_{i\in \mathrm{sl}} \left\langle q_i \mathbf{v}_i \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i(t))\right\rangle + \sum_n \left\langle q_n \mathbf{v}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_n(t))\right\rangle \tag{3.1.31}$$

makroskopska gustina struje. Za elektroneutralne molekule ona se svodi na gustinu struje slobodnih naelektrisanja. Kod provodnih sredina drugi član je obično zanemarljiv u odnosu na prvi. Zamenjujući izraze (3.1.15) i (3.1.30) u (3.1.6) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}(\varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho + \rho_{\mathrm{ext}} - \mathrm{div}\mathbf{P} \\
&\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \\
&\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\mathrm{rot}(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}) = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} + \mathrm{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\ .
\end{aligned} \tag{3.1.32}$$

Uvodeći **D**-vektor (električna indukcija) i jačinu magnetnog polja, **H** sa[2]

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\
\mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} - \mathbf{M}\ ,
\end{aligned} \tag{3.1.33}$$

prethodne jednačine postaju

$$\mathrm{div}\mathbf{D} = \rho + \rho_{\mathrm{ext}} \tag{3.1.34}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{3.1.35}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{3.1.36}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\mathrm{ext}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\ . \tag{3.1.37}$$

Ovo su Maksvel–Lorencove[3] jednačine za elektromagnetno polje u sredini. Nepoznate veličine su $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{j}$ i ρ. Broj nepoznatih je petnaest. Broj jednačina šest, jer su dve dopunski uslovi. Maksvel–Lorencove jednačine se moraju dopuniti sa još deset jednačina koje karakterišu sredinu.

[2]Vektor **D** se naziva i vektorom električnog pomeranja (engleski the electric displacement). Termini jačina magnetnog polja i magnetna indukcija, za veličine **H**, odnosno **B** su istorijski. Ova notacija signalizira da veličina **B** odgovara električnoj indukciji, a veličina **H** električnom polju. Medjutim, u suštini je obrnuto. Fundamentalne veličine kojima opisujemo elektromagnetno polje su **E** i **B**, jer one odredjuju silu koja deluje na probno naelektrisanje. Veličine **D** i **H** su pomoćne. Pojedini autori **H** nazivaju magnetnom indukcijom, a **B** jačinom magnetnog polja, da bi se napravila analogija izmedju električnih i magnetnih veličina.

[3]Često se nazivaju i samo Maksvelovim jednačinama.

3.2 Elektrodinamičke jednačine sredine

Kao što smo rekli Maksvel–Lorencove jednačine moramo dopuniti sa jednačinama koje karakterišu sredinu. Te jednačine su oblika

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E},\mathbf{B})\\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{E},\mathbf{B})\\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}(\mathbf{E},\mathbf{B})\ .\end{aligned}\tag{3.2.38}$$

Elektrodinamičke jednačine sredine[4] dobijamo bilo empirijski, bilo metodama teorijske fizike. Npr. za čvrsta tela one se dobijaju primenom metoda kvantne statističke fizike, za jonizovani gas odnosno plazmu moramo konsultovati teorijsku fiziku plazme itd.

U elektrostatičkom, odnosno magnetnostatičkom polju supstancijalne jednačine za neprovodnu sredinu imaju jednostavan oblik:

$$\begin{aligned}&\rho = 0\\ &\mathbf{j} = 0\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\\ &\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}\ ,\end{aligned}\tag{3.2.39}$$

gde su ε i μ konstante. Nazivamo ih relativna dielektrična permitivnost, odnosno relativna magnetna permeabilnost sredine. Jednačine sredine su, kao što vidimo linearne. Molekuli ovakvih sredina su najčešće elektroneutralni, pa se makroskopska gustina struje i naelektrisanja svode na gustine naelektrisanja i struje slobodnih naelektrisanja, ali i one su jednake nuli.

Sredine kod kojih prethodne formule važe i u promenljivom elektromagnetnom polju

$$\begin{aligned}&\rho = 0\\ &\mathbf{j} = 0\\ &\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\\ &\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mu\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\ ,\end{aligned}\tag{3.2.40}$$

zvaćemo Maksvelovi dielektrici. Jasno je da ove jednačine mogu važiti samo za sporo promenljiva polja.

Ukoliko se provodna sredina nalazi u statičkom polju onda je

$$\begin{aligned}&\rho = 0\\ &\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}\\ &\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\\ &\mathbf{B} = \mu_0\mu\mathbf{H}\ ,\end{aligned}\tag{3.2.41}$$

gde je σ provodnost sredine. Prva jednačina je posledica elektroneutralnosti sredine. Druga jednačina je Omov zakon. To je veza izmedju makroskopske gustine struje i električnog polja.

[4] Nazivaju se i supstancijalnim ili materijalnim jednačinama.

Maksvelov provodnik je sredina kod koje prethodne relacije važe i za promenljiva polja. Provodna sredina ne dozvoljava postojanje zapreminske gustine naelektrisanja. Polazeći od jednačine kontinuiteta i Omovog zakona

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\sigma \mathbf{E}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}\rho = 0$$

dobijamo

$$\rho(t) = \rho(0) e^{-\frac{\sigma t}{\varepsilon_0 \varepsilon}} \ . \tag{3.2.42}$$

Kod dobrih provodnika veličina $\varepsilon_0\varepsilon/\sigma$ je mala pa je $\rho = 0$.

Ako je sredina anizotropna onda su veličine ϵ, μ, σ tenzori dielektrične permitivnosti, magnetne permeabilnosti odnosno provodnosti. Jednačine (3.2.41) postaju

$$\begin{aligned} j_i(\mathbf{r}, t) &= \sigma_{ij} E_j(\mathbf{r}, t) \\ D_i(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j(\mathbf{r}, t) \\ B_i(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \mu_{ij} H_j(\mathbf{r}, t) \ . \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

Prethodne relacije su lokalne i simultane, tj. sredina je bez disperzije, što je fizički neprihvatljivo. Elektrodinamička reakcija sredine, koju odredjuju polarizacija i magnetizacija, u trenutku t zavisi od polja i osobina sredine u ranijim trenucima vremena. Ovakve sredine se nazivaju sredinama sa vremenskom disperzijom. Dakle, veza izmedju polarizacije, odnosno magnetizacije i polja je

$$\begin{aligned} P_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' f_{ij}(\mathbf{r}, t, t') E_j(t', \mathbf{r}) \\ M_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' g_{ij}(\mathbf{r}, t, t') H_j(t', \mathbf{r}) \ , \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

gde su f_{ij} i g_{ij} funkcije koje zavise od sredine. Polarizacija i magnetizacija ne mogu zavisiti od polja i karakteristika sredine u kasnijim trenucima vremena, jer bi time bila narušena kauzalnost. Elektrodinamičke jednačine linearne sredine sa vremenskom disperzijom su

$$\begin{aligned} D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' F_{ij}(\mathbf{r}, t, t') E_j(t', \mathbf{r}) \\ B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' G_{ij}(\mathbf{r}, t, t') H_j(t', \mathbf{r}) \\ j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' K_{ij}(\mathbf{r}, t, t') E_j(t', \mathbf{r}) \ . \end{aligned}$$

Tenzori $F_{ij}(\mathbf{r}, t, t'), G_{ij}(\mathbf{r}, t, t'), K_{ij}(\mathbf{r}, t, t')$ karakterišu sredinu. Tenzori F_{ij} i G_{ij} su u vezi sa tenzorima f_{ij} odnosno g_{ij}. Ako je sredina stacionarna, tj. njene osobine se ne menjaju sa vremenom, jezgra linearnih operatora F_{ij}, G_{ij} i K_{ij} zavise od razlike $t - t'$, a ne od t i t' ponaosob.

Za stacionarne sredine vrednosti jezgara integralnih operatora se ne menjaju pri vremenskim translacijama, tj.

$$F_{ij}(\mathbf{r}, t+\tau, t'+\tau) = F_{ij}(\mathbf{r}, t, t'), \tag{3.2.45}$$

za proizvoljno τ. Specijalno ako izaberemo $\tau = -t'$ dobijamo

$$F_{ij} = F_{ij}(\mathbf{r}, t-t') \tag{3.2.46}$$

kao što smo tvrdili. Supstancijalne jednačine za stacionarne sredine sa vremenskom disperzijom su

$$\begin{aligned}
D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' F_{ij}(\mathbf{r}, t-t') E_j(t', \mathbf{r}) \\
B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' G_{ij}(\mathbf{r}, t-t') H_j(t', \mathbf{r}) \\
j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' K_{ij}(\mathbf{r}, t-t') E_j(t', \mathbf{r}) \ .
\end{aligned}$$

Ukoliko npr. vrednost vektora električne indukcije u tački $\mathbf{r}$ zavisi od jačine polja u okolnim tačkama onda to nazivamo prostornom disperzijom. Vremenska disperzija, zbog konačnosti prostiranja elektromagnetne interakcije uvek prati prostornu disperziju. Dakle, za sredine sa prostorno–vremenskom disperzijom supstancijalne jednačine imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned}
D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \\
B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' G_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') H_j(t', \mathbf{r}') \\
j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' K_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \ .
\end{aligned}$$

Ove veze su linearne. Ako jezgra sva tri integralna operatora u prethodnim jednačinama zavise od razlike $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, tj, ukoliko je npr.

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t, t') E_j(t', \mathbf{r}') \tag{3.2.47}$$

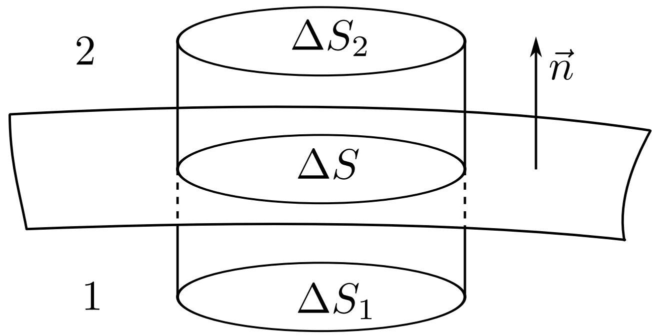
onda takve sredine nazivamo homogenim. Tenzor F_{ij} je translaciono invarijantan, tj.

$$F_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = F_{ij}(\mathbf{r} + \mathbf{a}, \mathbf{r}' + \mathbf{a}) \tag{3.2.48}$$

gde je $\mathbf{a}$ proizvoljan vektor. Specijalno za $\mathbf{a} = -\mathbf{r}'$ sledi

$$F_{ij} = F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \ .$$

Sredina može, u opštem slučaju, biti nelinearna. To su sredine kod kojih veza izmedju polarizacije, odnosno magnetizacije i polja nije linarna. Npr. sredine koje se nalaze u spoljašnjim



Slika 3.2: Granična površ izmedju dve sredine.

jakim poljima su nelinarne. Kod njih je npr. veza izmedju polarizacije i električnog polja data sa

$$P_i = \epsilon_0 \kappa_{ij} E_j + \epsilon_0 \kappa^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \epsilon_0 \kappa^{(3)}_{ijkm} E_j E_k E_m \ldots \ , \tag{3.2.49}$$

gde su $\kappa_{ij}, \kappa^{(2)}_{ijk}$ i $\kappa^{(3)}_{ijkm}$ koeficijenti. Ove veze mogu biti komplikovanije. Mi nećemo ulaziti u analizu ovakvih sredina.

3.3 Granični uslovi

Postoje fizičke situacije u kojima jačine električnog polja i magnetnog polja kao i električna i magnetna indukcija nisu neprekidne funkcije. Ukoliko se na nekoj površi nalaze naelektrisanja i/ili teku struje onda neke od komponenti polja trpe skokove. Vrednosti ovih skokova se dobijaju iz samih Maksvel–Lorencovih jednačina. Neka je Σ granična površ izmedju dve sredine, kao što je prikazano na slici 3.2. Veličine koje se odnose na prvu sredinu obeležićemo indeksom 1, a one koje se odnose na drugu sredinu sa indeksom 2. Uzećemo da je ΔS mala površina na grničnoj površi i konstruisaćemo zatvorenu cilindričnu površ tako što ćemo u svakoj tački površi ΔS konstruisati normalu na ovu površ. Visina ove normale je Δh, po pola u svakoj od oblasti 1 i 2. Bazisi ove cilindrične površi su ΔS_1 i ΔS_2, kao što se vidi na slici 3.2. Zapremina koju obuhvata cilindrična površ je ΔV. Integracijom prve Maksvel-Lorencove jednačine, (3.1.34) po zapremini ΔV imamo

$$\int_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{D} \mathrm{d}^3 r = \int_{\Delta V} \rho \mathrm{d}^3 r \ . \tag{3.3.50}$$

Sa ρ smo obeležili zbir makroskopske gustine nealektrisanje i gustine spolja unetih naelektrisanja. Primenom Gausove teoreme imamo

$$\begin{aligned} \int_{\Delta V} \rho \mathrm{d}^3 r &= \oint_{\partial(\Delta V)} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \int_{\Delta S_1} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{\Delta S_2} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{M} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ , \end{aligned} \tag{3.3.51}$$

gde je M omotač cilindra. Element zapremine je $\mathrm{d}^3r = \Delta h \mathrm{d}S$ za malo Δh, pa u limesu $\Delta h \to 0$ imamo

$$\int_{\Delta S} \lim_{\Delta h \to 0} \Big(\rho \Delta h\Big) \mathrm{d}S = \int_{\Delta S} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \ , \tag{3.3.52}$$

gde smo uveli ort normale $\mathbf{n}$ na graničnoj površi. Vektor $\mathbf{n}$ je usmeren od sredine 1 ka sredini 2. Kada Δh teži nuli površi $\Delta S_1, \ \Delta S_2$ se poklapaju sa ΔS. Izraz

$$\lim_{\Delta h \to 0} \Big(\rho \Delta h\Big)$$

u (3.3.52) je nenulti ako gustina naelektrisanja divergira na graničnoj površini. Očigledno je, da je on jednak površinskoj gustini makroskopskogi spolja unetog naelektrisanja na graničnoj površi. Dakle,

$$\int_{\Delta S} (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S = \int_{\Delta S} \sigma \mathrm{d}S \ . \tag{3.3.53}$$

Kako je predhodni izraz tačan za proizvoljno malu površ ΔS to je

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma \ , \tag{3.3.54}$$

gde je $D_n = \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$ normalna projekcija vektora električne indukcije. Projekcija vektora električne indukcije na pravac normale u datoj tački granične ravni i u datom trenutku vremena trpi skok koji je jednak površinskoj gustini makroskopskih i eksternih naelektrisanja u toj tački granične površi i u tom trenutku vremena.

Analogno, iz (3.1.35) sledi

$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \ , \tag{3.3.55}$$

tj. normalna projekcija magnetne indukcije je neprekidna funkcija na granici dve sredine. Iz izraza za zapreminsku gustinu polarizacionog (vezanog) naelektrisanja

$$\mathrm{div}\mathbf{P} = -\rho_{\mathrm{vez}} \tag{3.3.56}$$

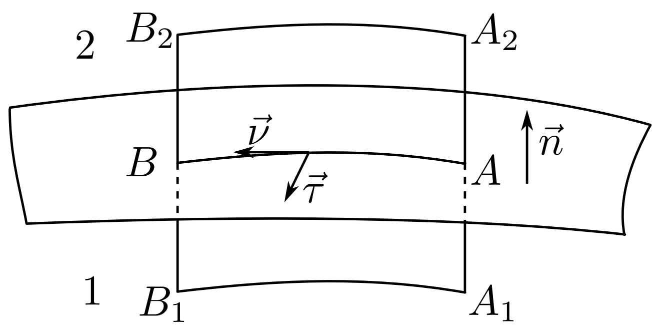
sledi

$$P_{2n} - P_{1n} = -\sigma_{\mathrm{vez}} \ . \tag{3.3.57}$$

Normalna komponenta vektora polarizacije na granici dve sredine ima skok ukoliko se na njoj nalaze površinska vezana naelektrisanja.

Analizirajmo sada granične uslove koji slede iz treće i četvrte Maksvel–Lorencove jednačine. Neka se kriva AB nalazi na graničnoj površi Σ, slika 3.3. Konstruišimo površinu ΔS kojoj pripada kriva AB i koja je normalna na graničnu površ. Visina ove površi je Δh, po pola sa svake strane granice. Integralićemo četvrtu Maksvel–Lorencovu jednačinu (3.1.37) po površini $A_2B_2B_1A_1$

$$\begin{aligned} \int_{\Delta S} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \quad &+ \quad \int_{\Delta S} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{\Delta S} \mathrm{rot}\mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \quad \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{A_2}^{B_2} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \\ &+ \quad \int_{B_2}^{B_1} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} + \int_{B_1}^{A_2} \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \ . \end{aligned} \tag{3.3.58}$$



Slika 3.3: Površina dS je $A_2B_2BB_1A_1A$

U prethodnom izrazu primenili smo Stoksovu teoremu. Dalje ćemo element površine površi $A_2B_2B_1A_1$ napisati kao

$$\mathrm{d}\mathbf{S} = \mathrm{d}S\boldsymbol{\nu} = \Delta h \mathrm{d}l\boldsymbol{\nu} \ , \tag{3.3.59}$$

i uzeti limes $\Delta h \to 0$. Tako dobijamo

$$\int_A^B \lim_{\Delta h \to 0} \Big(\mathbf{j}\Delta h\Big)\boldsymbol{\nu}\mathrm{d}l = \int_A^B (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l \ . \tag{3.3.60}$$

U limesu $\Delta h \to 0$ linijski integrali duž A_1A_2 i B_1B_2 su jednaki nuli. Veličinu $\lim_{\Delta h \to 0}\Big(\mathbf{j}\Delta h\Big)$ ćemo obeležiti sa $\mathbf{i}$. Ona je gustina površinske struje makroskopskih i spolja unetih naelektrisanja. Ona je jednaka količini naelektrisanja koje u jedinici vremena prodje kroz jediničnu dužinu koja je normalna na pravac prenošenja naelektrisanja. Gustina površinske struje paralelna je graničnoj površi. Iz (3.3.60) sledi

$$\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\cdot\boldsymbol{\tau} \ . \tag{3.3.61}$$

Primenom $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu}\times\mathbf{n}$, imamo

$$\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)\cdot(\boldsymbol{\nu}\times\mathbf{n}) \ , \tag{3.3.62}$$

odnosno

$$\mathbf{i}\cdot\boldsymbol{\nu} = (\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1))\cdot\boldsymbol{\nu} \ . \tag{3.3.63}$$

Pošto je $\boldsymbol{\nu}$ proizvoljan vektor koji pripada graničnoj površi i kako i vektor površinske gustine struje takodje pripada ovoj površi, to sledi

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{i} \ . \tag{3.3.64}$$

Ova relacija daje skok tangencijalne komponente jačine magnetnog polja. Množenjem poslednje relacije vektorski sa $\mathbf{n}$ dobijamo

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{i}\times\mathbf{n} \ , \tag{3.3.65}$$

gde su $\mathbf{H}_{2t}$ odnosno $\mathbf{H}_{1t}$ tangencijalne komponente vektora jačine magnetnog polja u sredini 2 odnosno 1[5]. Tangencijalna komponenta jačine magnetnog polja nije neprekidna pri prelasku iz jedne u drugu sredinu u onim tačkama granične površi gde postoji površinska struja makroskopskih i/ili externih naelektrisanja.

Analogno iz treće Maksvelove jednačine

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

sledi

$$\mathbf{E_{2t}} - \mathbf{E_{1t}} = \mathbf{0} \quad . \tag{3.3.66}$$

Tangencijalna komponenta vektora električnog polja je neprekidna. Zapreminska gustina vezanih struja je zbir magnetizacione i polarizacione struje

$$\mathbf{j}_{\mathrm{vez}} = \mathrm{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \ . \tag{3.3.67}$$

Odavde sledi izraz za skok tangencijalne komponente magnetizacije

$$\mathbf{M}_{2t} - \mathbf{M}_{1t} = \mathbf{i}_{\mathrm{vez}} \times \mathbf{n} \ . \tag{3.3.68}$$

Ona postoji u onim tačkama granične površine u kojima teku struje vezanih naelektrisanja.

[5] Proizvoljan vektor $\mathbf{A}$ možemo razložiti na normalnu i tangencijalnu komponentu u odnosu na ort $\mathbf{n}$ na sledeći način

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n + \mathbf{A}_t$$

gde je

$$\mathbf{A}_n = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$$

i

$$\mathbf{A}_t = (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \times \mathbf{n} \ .$$

Glava 4

Teoreme elektromagnetnog polja

Elektromagnetno polje ima energiju, impuls i moment impulsa. U ovoj glavi, na sistematski način, ćemo odrediti ove veličine. Iz teorijske mehanike (vidi npr. [10]) je poznato da su ove veličine vezane sa prostorno-vremenskom simetrijom teorije. Jedan način da odredimo ove veličine je preko Neterine teoreme. Medjutim, mi ćemo ove veličine za elektromagnetno polje odrediti na indirektan način. Počićemo od odgovarajućih teorema Njutnove mehanike.

4.1 Pointingova teorema

Razmotrimo sistem naelektrisanih čestica koje se kreću unutar neke zapremine. Ove čestice generišu elektromagnetno polje. Promena kinetičke energije čestica u jedinici vremena, po teoremi energije, je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha) = \sum_\alpha q_\alpha(\mathbf{E}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha)\cdot \mathbf{v}_\alpha = \sum_\alpha q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\alpha \ , \tag{4.1.1}$$

gde smo sa $\mathcal{E}_\alpha$ obeležili energiju čestice indeksa α. Električno i magnetno polje u tački u kojoj se u datom trenutku nalazi naelektrisanje q_α su $\mathbf{E}_\alpha$ odnosno $\mathbf{B}_\alpha$. Iz gornje formule vidimo da magnetno polje ne vrši rad. Ono može da promeni pravac i smer brzine čestice, ali ne i njen intenzitet. Prelazak sa diskretne na kontinualnu raspodelu se lako nalazi 'ubacivanjem' delta funkcije:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha\Big) &= \int \mathrm{d}^3 r(\sum_\alpha q_\alpha \mathbf{v}_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_\alpha)(t))\cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ &= \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \ . \end{aligned}\tag{4.1.2}$$

Izraz $\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$ je rad polja u jedinici vremena (snaga) na premeštanju naelektrisanja. On govori o pretvaranju elektromagnetne u mehaničku energiju.

Pretpostavimo sada da je unutar neke fiksne oblasti V prisutna makroskopska sredina koja je nepokretna, linearna i neka su efekti disperzije sredine zanemarljivi. Primenom četvrte Maksvel–Lorencove jednačine i vektorskog identiteta

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot \mathrm{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}$$

imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} &= \mathbf{E}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{H}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\
&= -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})+\mathbf{H}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\\
&= -\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\ .
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

U drugom redu iskoristili smo treću Maksvel–Lorencovu jednačinu. Na osnovu prethodnog izraza i (4.1.2) imamo

$$\int_V \mathrm{d}^3r\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}=-\int_V \mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}^3r-\int_V\Big(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\Big)\mathrm{d}^3r\ . \tag{4.1.4}$$

Sa $\mathbf{j}$ u (4.1.4) obeležili smo zbir spoljašnje i makrosksopske gustine struje u sredini.

Izraz $\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}$ u opštem slučaju nije totalni diferencijal. Za sredine koje su linearna i bez disperzije ovaj izraz jeste totalni diferencijal, i to ćemo sada pokazati. Jednačine koje karakterišu sredinu imaju sledeći oblik

$$D_i=\epsilon_0\epsilon_{ij}E_j,\ \ B_i=\mu_0\mu_{ij}H_j. \tag{4.1.5}$$

Tada imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D} &= E_i\mathrm{d}D_i=\epsilon_0\epsilon_{ij}E_i\mathrm{d}E_j\\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_{ij}E_i\mathrm{d}E_j+\epsilon_{ij}E_i\mathrm{d}E_j)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_{ij}E_i\mathrm{d}E_j+\epsilon_{ji}E_j\mathrm{d}E_i)\\
&= \frac{1}{2}\epsilon_0(\epsilon_{ij}E_i\mathrm{d}E_j+\epsilon_{ij}E_j\mathrm{d}E_i)\\
&= \frac{1}{2}(E_i\mathrm{d}D_i+D_i\mathrm{d}E_i)=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D})\ ,
\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

gde smo u trećem redu neme indekse i i j zamenili u drugom članu, a zatim u narednom redu iskoristili da je tenzor električne propustljivosti simetričan. Slično je

$$\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{1}{2}\mathrm{d}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\ . \tag{4.1.7}$$

Zamenom (4.1.6) i (4.1.7) u (4.1.4) dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3r\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\mathrm{d}^3r\Big(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}+\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\Big)=-\oint_{S=\partial V}\mathbf{S_p}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\ , \tag{4.1.8}$$

gde je $\mathbf{S}_p=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ Pointingov vektor. Izraz

$$W=\int_V\mathrm{d}^3r\Big(\frac{\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}}{2}+\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{2}\Big)$$

je elektromagnetna energija, dok je podintegralni izraz

$$u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}) \ ,$$

gustina elektromagnetne energije. U slučaju sredine koju analiziramo veličina

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \Big(\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\Big)$$

jeste vremenski izvod veličine koju interpretiramo kao energiju elektromagnetnog polja. U opštem slučaju taj izraz nije vremenski izvod neke veličine, pa energiju elektromagnetnog polja ne možemo generalno definisati. U sredinama sa disperzijom postoje gubici energije. Kod takvih sredina gornji izraz nije totalni diferencijal.

Pointingovu teoremu (4.1.8) možemo iskazati rečima na sledeći način: Zbir promene elektromagnetne energije u oblasti V u jedinici vremena i energije koja u jedinici vremena iscuri kroz graničnu poršinu oblasti V jednaka je negativnom radu u jedinici vremena na premeštanju naelektrisanja. Koristeći (4.1.2) imamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathcal{E}_\alpha + W_{\mathrm{em}}\Big) = -\oint_{\partial V} \mathbf{S}_p \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ , \tag{4.1.9}$$

odakle vidimo da je promena mehaničke i energije elektromagnetnog polja u jedinici vremena jednaka negativnom fluksu Pointingovog vektora kroz graničnu površinu. Ovo je očigledno zakon održanja energije, i još jedna formulacija Pointingove teoreme.

Ako se naelektrisanja nalaze u vakuumu, Pointingova teorema (4.1.8) ima oblik

$$\int_V \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3 r \Big(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0}\Big) = -\oint_{S=\partial V} \mathbf{S_p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ , \tag{4.1.10}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(W_{\mathrm{meh}} + W_{\mathrm{em}}\Big) = -\oint_{S=\partial V} \mathbf{S_p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{4.1.11}$$

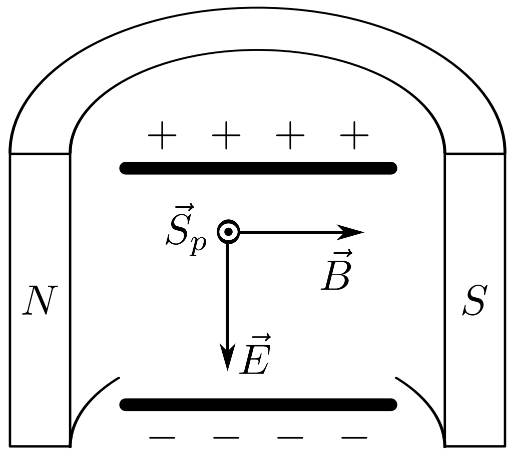
Za polje se kaže da je potpuno ako je jednako nuli na granici konačne oblasti, ili, ako je granica u beskonačnosti, onda polje opada sa rastojanjem bar kao $1/r^2$. Za potpuno polje fluks Pointingovog vektora kroz graničnu površ je nula, pa je ukupna energija sistema, tj. zbir energije polja i mehaničke energije stalan. Potpuno polje je analogon izolovanog sistema u mehanici. Pointingovu teoremu možemo napisati i u diferencijalnom obliku. Iz (4.1.8) sledi

$$\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{S}_p = 0 \tag{4.1.12}$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_{\mathrm{meh}} + u_{\mathrm{em}}) + \mathrm{div}\mathbf{S}_p = 0 \ . \tag{4.1.13}$$

Prethodni izraz ima istu formu kao i jednačina kontinuiteta; to je standardni oblik zakona održanja. Sa u_{meh} označili smo zapreminsku gustinu mehaničke energije naelektrisanih čestica.



Slika 4.1: Pointingov vektor u slučaju ortogonalnih statičkih polja.

Fluks Pointingovog vektora

$$\oint_S \mathbf{S_p} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

je energija u jedinici vremena koja prostruji kroz zatvorenu poršinu S. Dimenzije Pointingovog vektora su J/sm^2. Da li možemo interperirati Pointingov vektor lokalno, kao gustinu fluksa snage tj. kao energiju koja u jedinici vremena prodje kroz površinu normalnu na pravac prenošenja energije? U jednom broju slučajeva to je moguće, ali ne važi generalno. Rekli smo da je $\mathbf{S}_p = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ Pointingov vektor. Medjutim, umesto njega možemo za Pointingov vektor uzeti i čitavu klasu vektora

$$\mathbf{S}'_p = \mathbf{S}_p + \mathrm{rot}\boldsymbol{\Lambda},$$

gde je $\boldsymbol{\Lambda}$ proizvoljno vektorsko polje, jer je divrot $= 0$. Pointingov vektor nije jednoznačno definisan. Pointingovi vektori koji se razlikuju za rotor nekog vektorskog polja daju isti fluks kroz zatvorenu površinu i istu divergenciju. Pointingova teorema ne vidi razliku izmedju njih. Iz tog razloga Pointingov vektor nije opservabilna veličina. Fizički smisao ima fluks Pointingovog vektora kroz zatvorenu površinu, on je jednak negativnoj promeni energije (mehaničke i elektromagnetne) u oblasti obuhvaćenoj tom površinom.

Navedimo jednostavan primer. Neka je elektrostatičko polje pločasog kondenzatora postavljeno ortogonalno na magnetostatičko polje permanentnog magneta, kao na slici 4.1. Pointingov vektor $\mathbf{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ je različit od nule, iako nema nikakvog strujanja energije; polja su statička. Medjutim, fluks Pointingovog vektora kroz ma koju zatvorenu površinu u ovoj oblasti je jednak nuli.

Primenimo Pointingovu teoremu za dugačak provodnik poluprečnika a koji je vezan na izvor elektromotorne sile. Neka je $z-$osa usmerena duž ose simetrije provodnika. Električno polje u provodniku je $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_z = (U/l)\mathbf{e}_z$, gde je U razlika potencijala izmedju krajeva provodnika, a l njegova dužina. Kroz poprečni presek provodnika protiče struja I, pa je magnetno polje u oblasti van provodnika dato sa

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}\mathbf{e}_\varphi \ . \tag{4.1.14}$$

Pointingov vektor na omotaču provodnika, $r = a$ je

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{EI}{2\pi a}\mathbf{e}_\rho \ .$$

Za površinu S u Pointingovoj teoremi uzećemo cilindar čiji je omotač površina provodnika. Fluks Pointingovog vektora kroz ovu površ je

$$\oint_S \mathbf{S}_p \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -ElI = -UI = -RI^2 \ ,$$

gde je R otpor provodnika. Pointingova teorema ima sledeći oblik

$$\int \mathrm{d}^3 r\, \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = RI^2 = UI \ .$$

Dobili smo Džulov zakon: snaga oslobodjena u provodniku je proizvod struje i napona. Pointigov vektor je usmeren ka osi simetrije provodnika. Da li energija od izvora u provodnik dolazi iz okolnog prostora ili kroz žicu koja spaja provodnik sa izvorom? Problem je vezan za lokalnu interpretaciju Pointingovog vektora. Ono što sigurno možemo reći je kolika je energija koja prodje kroz cilindaričnu površ jedinične dužine oko provodnika, jer ta veličina figuriše u Pointingovoj teoremi.

Ako bi granična površina obuhvatala i izvor elektromotorne sile tada bi primenom Pointingove teoreme dobili

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{em}}}{\mathrm{d}t} + \int \mathrm{d}^3 r \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' = -\oint_S \mathbf{S}_p \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{4.1.15}$$

Primenili smo Omov zakon

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}') \ ,$$

gde je $\mathbf{E}'$ neelektromagnetno polje. Takodje smo uzeli da je provodnik izotropan. Izraz

$$\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}'$$

je snaga izvora EMS. Iz izraza (4.1.15) sledi

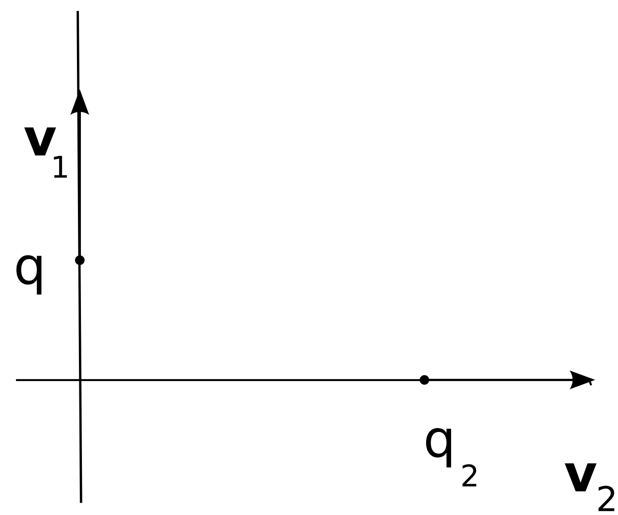
$$\int \mathrm{d}^3 r \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}' \ ,$$

tj. Džulova snaga je jednaka snazi izvora.

Recimo na kraju da u svim eksperimentima se meri promenu energije u jedinici vremena u oblasti prostora koju zauzima detektor. Ova veličina je fluks Pointingovog vektora.

4.2 Teorema impulsa

Na kursu mehanike (vidi npr. [10]) smo naučili da se ukupni mehanički impuls izolovanog sistema čestica ne menja. Očuvanje impulsa ovakvih sistema je posledica dve činjenice. Prva je da je sistem izolovan. Druga je da je zbir unutrašnjih sila, zbog zakona akcije i reakcije, jednak nuli.



Slika 4.2: Dva naelektrisanja koja se kreću u ravni slike po medjusobno normalnim pravcima.

Razmotrimo izolovan sistem dve naelektrisane čestice q_1 i q_2 u vakuumu, koje se kreću u ravni stalnim brzinama duž dva ortogonalna pravca, kao što je prikazano na slici 4.2. U nekom trenutku vremena brzina drugog naelektrisanja, $\mathbf{v}_2$ je usmerena duž pravca koji spaja ova dva naelektrisanja, dok je $\mathbf{v}_1$ normalna na taj pravac. Lorencova sila kojom drugo naelektrisanje deluje na prvo je

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_1 \mathbf{v}_1 \times \frac{q_2(\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2))}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \ . \tag{4.2.16}$$

Odmah vidimo da je ova sila jednaka nuli zbog kolinearnosti vektora brzine druge čestice i relativnog radijus vektora jedne čestice u odnosu na drugu. Sa druge strane, sila kojom prvo naelektrisanje deluje na drugo,

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} q_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{q_1(\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1))}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \tag{4.2.17}$$

je različita od nule.

Zaključujemo da ne važi zakon akcije i reakcije. Prema tome, bez obzira što nema spoljnih sila koje deluju na ove dve čestice, mehanički impuls ovog sistema čestica nije očuvan. Medjutim, impuls ovog sistema bi morao biti očuvan, jer je sistem translaciono invarijantan[1]. Rešenje ovog 'paradoksa' leži u činjenici da pored mehaničkog impulsa i samo elektromagnetno polje ima impuls. Ukupni impuls, tj. zbir mehaničkog i impulsa polja je očuvan. U nastavku definisaćemo impuls elektromagnetnog polja.

Razmatrajmo sistem naelektrisanih čestica u vakuumu. Promena mehaničkog impulsa čestica

[1] Veza izmedju translacione invarijantnosti i očuvanja impulsa je sadržaj standardnog kursa teorijske mehanike. Vidi npr. [10].

jednaka je ukupnoj sili koja deluje na čestice:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha\Big) &= \sum_\alpha q_\alpha(\mathbf{E}_\alpha + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}_\alpha) \\
&= \int_V \mathrm{d}^3 r \sum_\alpha q_a(\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t))\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha(t)) \\
&= \int_V \mathrm{d}^3 r(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \ , \qquad (4.2.18)
\end{aligned}
$$

gde smo ubacili jednu delta funkciju kako bi rezultat generalisali na neprekidnu raspodelu naelektrisanja i struja. Ako sa $\mathbf{P}_{\mathrm{meh}}$ obeležimo ukupan mehanički impuls svih čestica kontinulane sredine u zapremini V, dobijamo

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{meh}}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3 r(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \ . \qquad (4.2.19)
$$

Iz (2.4.85) i (2.4.88) možemo izraziti zapreminsku gustinu naelektrisanja odnosno struje i dobijene izraze zameniti u (4.2.19), što daje

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{meh}}}{\mathrm{d}t} &= \int \mathrm{d}^3 r\Big[\epsilon_0 \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} + \Big(\frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\Big) \times \mathbf{B}\Big] \\
&= \int_V \mathrm{d}^3 r\Big[\epsilon_0 \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\mathbf{B} \times \mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \epsilon_0\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\Big] \ .
\end{aligned}
$$

Četvrti član zadnjeg izraza ćemo transformisati primenom treće Maksvelove jednačine. Pored toga, gornjem izrazu ćemo dodati član proporcionalan divergenciji magnetnog polja. Tako dobijamo

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{meh}}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathrm{d}^3 r\Big[\epsilon_0 \mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} - \epsilon_0\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})\Big] \ .
$$

Latiničnim slovima $i, j, \ldots$ obeležićemo Dekartove koordinate. Primenom (A.0.2, A.0.1) i (A.0.3) $i-$ta komponenta izraza $\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathrm{rot}\mathbf{E}$ je

$$
(\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathrm{rot}\mathbf{E})_i = E_i\partial_j E_j - \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}E_j\partial_l E_m \ , \qquad (4.2.20)
$$

gde se podrazumeva sumiranje po ponovljenom indeksu. Primenom $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$ imamo

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{E}\mathrm{div}\mathbf{E} - \mathbf{E} \times \mathrm{rot}\mathbf{E})_i &= E_i\partial_j E_j - (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})E_j\partial_l E_m \\
&= E_i\partial_j E_j - E_j\partial_i E_j + E_j\partial_j E_i \\
&= \partial_j(E_i E_j - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\delta_{ij}) \ . \qquad (4.2.21)
\end{aligned}
$$

Analogan identitet važi za treći i četvrti član, pa je

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}_{\mathrm{meh}}}{\mathrm{d}t}\right)_i &= \int_V \mathrm{d}^3 r \partial_j \Big(\epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2)\delta_{ij}\Big) \\
&- \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r (\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i \\
&= \int_V \mathrm{d}^3 r \partial_j T_{ij} - \epsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_V \mathrm{d}^3 r (\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i \ ,
\end{aligned}
$$

gde je

$$
T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}^2)\delta_{ij} \tag{4.2.22}
$$

Maksvelov tenzor napona. Tenzor T_{ij} možemo prepisati u obliku[2]

$$
\hat{T} = \epsilon_0 |\mathbf{E} >< \mathbf{E}| + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B} >< \mathbf{B}| - uI \ , \tag{4.2.23}
$$

gde je u zapreminska gustina energije elektromagnetnog polja u vakuumu. Kao što znamo, dijagonalne komponente tenzora napona su pritisci, a vandijagonalne su naponi smicanja. Primenom Gausove teoreme za tenzore

$$
\int \mathrm{d}^3 r \partial_j T_{ij} = \oint_{S=\partial V} T_{ij} \mathrm{d}S_j \ ,
$$

zapreminski integral (4.2.22) se može transformisati u površinski, pa teorema impulsa za sistem koji čine polje i naelektrisane čestice postaje

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\mathbf{P}_{\mathrm{meh}} + \epsilon_0 \int \mathrm{d}^3 r (\mathbf{E}\times\mathbf{B})\Big] = \oint_S \hat{T} \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{4.2.24}
$$

Iz nje vidimo da je ukupan impuls sistema zbir mehaničkog impulsa $\mathbf{P}_{\mathrm{meh}} = \sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$ i impulsa elektromagnetnog polja

$$
\mathbf{G} = \int_V \mathbf{g} \mathrm{d}^3 r = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}^3 r (\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{1}{c^2} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{S}_p \ .
$$

Unutar neke oblasti prostora impuls se menja jer "curi" kroz graničnu površ te oblasti. Silu koja deluje na naelektrisanja i struje unutar neke oblasti V možemo naći na dva načina. Jedan je direktan, primenom izraza (4.2.19) u kome je sila izražena kao zapreminski integral po oblasti V. Drugi način je primenom (4.2.24), gde je jedan deo sile napisan kao površinski integral po granici oblasti koja obuhvata naelektrisanja i struje. Za potpuno polje površinski integral u (4.2.24) je jednak nuli, pa je ukupan impuls sistema očuvan.

---

[2]Matrični element dijade $|\mathbf{A} >< \mathbf{B}|$ je $(|\mathbf{A} >< \mathbf{B}|)_{ij} = A_i B_j^\star$. Dijada $|\mathbf{A} >< \mathbf{B}|$ na vektore deluje prema

$$
(|\mathbf{A} >< \mathbf{B}|)|\mathbf{C} > = |\mathbf{A} >< \mathbf{B}|\mathbf{C} > \ ,
$$

$$
< \mathbf{C}|(|\mathbf{A} >< \mathbf{B}|) = < \mathbf{C}|\mathbf{A} >< \mathbf{B}| \ .
$$

Prethodno razmatranje se odnosilo na sistem naelektrisanih čestica i struja u vakuumu. U slučaju nepokretne linearne i izotropne sredine bez disperzije supstancijalne jednačine imaju oblik

$$\mathbf{D} = \epsilon_0\epsilon_r(\mathbf{r})\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_\mathbf{0}\mu_\mathbf{r}(\mathbf{r})\mathbf{H} \ .$$

Pretpostavili smo da je sredina nehomogena. Pored toga pretpostavićemo da relativna dielektrična i magnetna permeabilnost ne zavise od temperature. U ovom slučaju, sličnom analizom kao u slučaju vakuuma se može dobiti

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha + \int \mathrm{d}^3r(\mathbf{D}\times\mathbf{B})\Big] - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3r(\epsilon_0\mathbf{E}^2\nabla\epsilon_r + \mu_0\mathbf{H}^2\nabla\mu_r) = \oint_S \hat{T}\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{4.2.25}$$

Maksvelov tenzor napona dat je sa

$$\hat{T} = |\mathbf{E}><\mathbf{D}| + |\mathbf{B}><\mathbf{H}| - \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})I \ . \tag{4.2.26}$$

U (4.2.25) suma $\sum_\alpha \mathbf{p}_\alpha$ je mehanički impuls slobodnih i eksternih naelektrisanja. Drugi član u (4.2.25) potiče od sile koja deluje na vezana naelektrisanja. Minkovski (1908) je izraz

$$\mathbf{G}_M = \int \mathrm{d}^3r(\mathbf{D}\times\mathbf{B})$$

interpretirao kao impuls elektromagnetnog polja u sredini. Mehanička sila koja deluje na sredinu je data sa

$$\mathbf{F} = \int_V \mathrm{d}^3r\mathbf{f}_M = \int_V \mathrm{d}^3r(\rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2\nabla\epsilon_r - \frac{1}{2}\mu_0\mathbf{H}^2\nabla\mu_r) \tag{4.2.27}$$

i ona se može prepisati kao površinski integral tenzora napona i član koji je izvod impulsa polja kako ga je definisao Minkovski. U lokalnom obliku izraz (4.2.25) je

$$\mathbf{f}_M = \mathrm{div}\hat{T} - \frac{\partial\mathbf{g}_M}{\partial t} \ , \tag{4.2.28}$$

gde je $\mathbf{g}_M$ Minkovskijeva gustina impulsa polja.

Ne ulazeći u detaljnu analizu prihvatljiviji izraz za impuls polja je

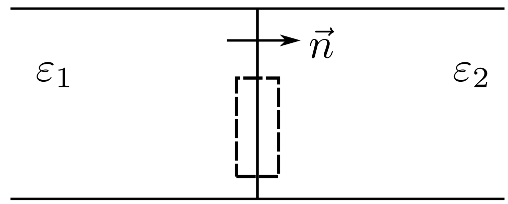
$$\mathbf{G}_A = \frac{1}{c^2}\int_V (\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}^3r \ .$$

Ovaj rezultat potiče od Abrahama.

Primer 1. Odrediti silu po jedinici površine koja deluje na provodnik na kome je zadata raspodela površinskog naelektrisanja.

Rešenje: Električno polje je $\mathbf{E} = E\mathbf{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n}$ gde je $\mathbf{n}$ ort spoljašnje normale prodnika. Kako je polje statičko, to iz (4.2.24) sledi

$$\mathbf{F} = \oint_S (\epsilon_0 E^2\mathbf{n} - \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2\mathbf{n})\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\oint_S \epsilon_0 E^2\mathbf{n}\mathrm{d}S$$



Slika 4.3: Dva dielektrika propustljivosti ϵ_1, odnosno ϵ_2.

pa je sila po jedinici površine

$$\mathbf{f} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{F}}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \mathbf{n} = u_e \mathbf{n} \ .$$

Ako su ploče ravnog kondenzatora naelektrisane površinskom gustinom σ, odnosno $-\sigma$, sila koja deluje na pozitivnu ploču, prema prethodnoj formuli je

$$F = (\sigma S)\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \ .$$

Izraz za silu je napisan u obliku proizvoda naelektrisanja ploče σS i električnog polja $\sigma/(2\epsilon_0)$ koje potiče od druge ploče.

Primer 2. Naći silu po jedinici površine koja deluje na graničnoj površini izmedju dva dielektrika prikazana na slici 4.3. Električne propustljivosti su ϵ_1 i ϵ_2.

Rešenje: Sila koja deluje na tanak sloj sa slike je

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = (T^{(1)} + T^{(2)})\mathrm{d}\mathbf{S}$$

gde je

$$T^{(1)}\mathrm{d}\mathbf{S} = -(D_{1n}\mathbf{E}_1 - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_1\mathbf{E}_1^2\mathbf{n})\mathrm{d}S \ ,$$

$$T^{(2)}\mathrm{d}\mathbf{S} = (D_{2n}\mathbf{E}_2 - \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_2\mathbf{E}_2^2\mathbf{n})\mathrm{d}S \ ,$$

pa je

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = (D_{2n}\mathbf{E}_2 - D_{1n}\mathbf{E}_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{D}_1)\mathbf{n})\mathrm{d}S \ .$$

Ako bi se ova dva dielektrika nalazila izmedju obloga ravnog kondenzatora, koji je na stalnom napanu V i kod koga je rastojanje izmedju ploča d, sila bi bila

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{d}\right)^2\epsilon_0(\epsilon_1 - \epsilon_2)\mathbf{n}\mathrm{d}S \ .$$

4.3 Teorema momenta impulsa

Neka se naelektrisane čestice nalaze unutar zapremine V u vakuumu. Teorema momenta impulsa za ovaj sistem je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha\Big) = \int_V \mathrm{d}^3r\, \mathbf{r} \times (\rho\mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}) \ , \tag{4.3.29}$$

gde je $\mathbf{L}_\alpha$ moment imulsa čestice indeksa α. Postupajući kao u prethodnom poglavlju, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha\Big)_i = \int_V \mathrm{d}^3r \epsilon_{ijk}x_j\partial_l T_{kl} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r\epsilon_{ijk}x_jg_k, \tag{4.3.30}$$

gde je $i = 1, 2, 3$. Prvi član na desnoj strani izraza (4.3.30) prepisaćemo kao

$$\epsilon_{ijk}x_j\partial_l T_{kl} = \epsilon_{ijk}\partial_l(x_jT_{kl}) \ , \tag{4.3.31}$$

jer je

$$\epsilon_{ijk}(\partial_l x_j)T_{kl} = \epsilon_{ijk}T_{kj} = 0 \ . \tag{4.3.32}$$

Izraz $\epsilon_{ijk}T_{kj}$ je jednak nuli, jer je proizvod dva tenzora od kojih je jedan (simbol Levi Čivita) antisimetričan po indeksima j i k a drugi, Maksvelov tenzor napona, simetričan po ovim indeksima. Onda izraz (4.3.30) postaje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha\Big)_i = \int_V \mathrm{d}^3r\epsilon_{ijk}\partial_l(x_jT_{kl}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r\epsilon_{ijk}x_jg_k \tag{4.3.33}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_\alpha \mathbf{L}_\alpha\Big)_i = \oint_{\partial V} \epsilon_{ijk}x_jT_{kl}\mathrm{d}S_l - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \mathrm{d}^3r\epsilon_{ijk}x_jg_k \ . \tag{4.3.34}$$

Dobili smo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\mathbf{L}_{\mathrm{meh}} + \int_V \mathrm{d}^3r(\mathbf{r} \times \mathbf{g})\Big) = \oint_{\partial V}(\mathbf{r} \times \hat{T}\mathrm{d}\mathbf{S}). \tag{4.3.35}$$

Izraz

$$\mathbf{L}_f = \epsilon_0 \int_V \mathrm{d}^3r(\mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})) \tag{4.3.36}$$

je moment impusa elektromagnetnog polja. Ukupni moment impulsa sistema naelektrisanih čestica i polja je zbir mehaničkog momenta impulsa i momenta impulsa polja. On se menaja unutar neke oblasti V jer curi kroz granicu ove oblasti.

Glava 5

Relativistička elektrodinamika

Ova glava posvećena je relativističkoj formulaciji elektrodinamike. Prvo ćemo se podsetiti Lorencovih transformacija. Mnogo više detalja o Lorencovim transformacijama možete naći u [1, 2, 9]. U naredna dva poglavlja uvešćemo četvorovektore gustine struje i potencijala. Polazna tačka u izvodjenju osnovnih jednačina u elektrodinamici je konstrukcija dejstva za elektromagnetno polje i naelektrisane čestice. Iz ovog dejstva, primenom Hamiltonovog principa dobijaju se jednačine kretanja čestica i elektromagnetnog polja. Pokazano je da su Maksvelove jednačine, kao i jednačine kretanja naelektrisanih čestica kovarijantne. Drugim rečima, Maksvelove jednačine i jednačine kretanja čestica imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Prema tome, ova glava posvećena je Lorencovoj simetriji elektrodinamike. Istorijski gledano, elektrodinamika je prva teorija sa ovom simetrijom. Maksvelove teorija elektromagnetizma direktno je vodila do nastanka specijalne teorije relativnosti.

5.1 Lorencove transformacije

U ovom poglavlju ukratko ćemo ponoviti neke osnovne elemente specijalne teorije relativnosti, posebno ističući njenu formulaciju u prostoru Minkovskog.

Tačke prostora Minkovskog (ct, x, y, z, t) su dogadjaji. Kvadrat intervala izmedju dva infinitezimalno bliska dogadjaja $(ct, \mathbf{r})$ i $(c(t + \mathrm{d}t), \mathbf{r} + \mathrm{d}\mathbf{r})$ u prostoru Minkovskog je

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 \ .$$

Brzina svetlosti, $c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$ je ista za sve inercijane posmatrače. To je jedan od osnovnih postulata specijalne relativnosti. Neka su S i S' dva inercijalna sistema. Koordinate u sistemu S' su primovane. Iz principa konstantnosti brzine svetlosti direktno sledi da je kvadrat intervala invarijanta. Drugim rečima, važi

$$c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}'^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\mathbf{r}^2 \ .$$

Vektori u prostoru Minkovskog su

$$\mathbf{x} = x^\mu \mathbf{e}_\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

gde su x^μ kontravarijantne komponente vektora $\mathbf{x}$ u bazi

$$\mathbf{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Metrika prostora Minkovskog je

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ona služi za odredjivanje dužine vektora. Kvadrat dužine četvorovektora x je

$$x^2 = x^T g x = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 .$$

Lorencove transformacije su linearne transformacije koordinata $x' = \Lambda x$, gde je Λ realna 4×4 matrica, koje ne menjaju kvadrat dužine četvorovektora, tj. za koje važi $x'^2 = x^2$. Prethodni uslov daje

$$x^T \Lambda^T g \Lambda x = x^T g x ,$$

odakle sledi

$$\Lambda^T g \Lambda = g . \tag{5.1.1}$$

Prethodna matrična jednačina sadrži deset uslova na matricu Λ, pa su Lorencove transformacije odredjene sa $16 - 10 = 6$ nezavisnih parametara. Lorencova grupa je šestoparametarska. Bust duž $x-$ose (prelazak iz sistema S u sistem S' koji se kreće konstantnom brzinom v duž $x-$ose) dat je sa

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , y' = y, \ z' = z , \tag{5.1.2}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} ,$$

gde su uvedene sledeće oznake

$$\beta = \frac{v}{c}, \ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Uvodeći $\tanh\phi = \beta$ matrica busta duž $x-$ose ima oblik[1]

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\phi & -\mathrm{sh}\phi & 0 & 0 \\ -\mathrm{sh}\phi & \mathrm{ch}\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lako se vidi da matrica busta duž $x-$ose zadovoljava uslov (5.1.1), tj. ona je Lorencova transformacija. Rotacija za ugao θ oko $z-$ose,

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

je takodje Lorencova transformacija. Šest nezavisnih Lorencovih transformacija su tri busta i tri rotacije.

Lorencove transformacije čine grupu. To ćemo sada pokazati. Potrebno je proveriti da li su sve aksiome grupe zadovoljene.

1. Ako su Λ_1 i Λ_2 Lorencove transformacije onda je i $\Lambda_1\Lambda_2$ Lorencova transformacija, jer

$$(\Lambda_1\Lambda_2)^T g(\Lambda_1\Lambda_2) = \Lambda_2^T(\Lambda_1^T g\Lambda_1)\Lambda_2 = \Lambda_2^T g\Lambda_2 = g .$$

Ovim smo proverili aksionu zatvorenosti.

2. Jedinični element u grupi je jedinična matrica.

3. Množenje matrica je asocijativno, pa to važi i za Lorencove transformacije.

4. Uzimanjem determinante uslova (5.1.1), dobijamo da je determinatna matrica Lorencove transformacije ± 1, pa su ove matrice invertibilne. Iz (5.1.1) sledi da je inverzni element $\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^T g$. Lako se vidi da je Λ^{-1} Lorencova transformacija.

Dakle, Lorencove transformacije formiraju grupu.
U komponentnoj notaciji inverzna Lorencova matrica je

$$(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} = (g^{-1}\Lambda^T g)^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\rho}\Lambda^{\sigma}{}_{\rho}g_{\sigma\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} .$$

Na prvi pogled iz prethodnog izraza sledi da važi $\Lambda^T = \Lambda^{-1}$. Medjutim, to nije tačno i u kontradikciji je sa (5.1.1). Transponovana matrica je

$$\Lambda^T = g\Lambda^{-1}g^{-1} ,$$

odnosno

$$(\Lambda^T)_{\mu}{}^{\rho} = (g\Lambda^{-1}g^{-1})_{\mu}{}^{\rho} = g_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\sigma}g^{\sigma\rho} = (\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\rho}.$$

Indeksi matrice Λ su $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, inverzne matrice $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu}$, a transponovane $(\Lambda^T)_{\mu}{}^{\rho}$. Kovarijantne komponente vektora su definisane sa

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu}x^{\nu} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} .$$

[1] μ je indeks vrste, a ν kolone.

Ispitajmo sada kako se kovarijantne komponente vektora, x_μ transformišu pri Lorencovim transformacijama:

$$\begin{aligned} x'_\mu = g_{\mu\nu}x'^\nu &= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho x^\rho \\ &= g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\rho g^{\rho\sigma}x_\sigma = (g\Lambda g^{-1})_\mu{}^\sigma x_\sigma \\ &= (\Lambda^{T-1})_\mu{}^\sigma x_\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu x_\sigma \\ &= \Lambda_\mu{}^\sigma x_\sigma \ . \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Prema tome kontravarijantne, odnosno kovarijantne komponete se transformišu prema:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ x'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu x_\nu = \Lambda_\mu{}^\nu x_\nu \ . \end{aligned}$$

Parcijalni izvodi po x^μ su

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \nabla \end{pmatrix} \ . \tag{5.1.4}$$

Ispitajmo njegov zakon transformacije. Primenom lančanog pravila imamo

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x'^\nu} = \Lambda^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \ . \tag{5.1.5}$$

Množeći prethodni izraz sa $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma$ dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial x'^\sigma} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\sigma \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ .$$

Dakle, izvod po kontravarijantnoj komponenti vektora transformiše se kao kovarijantna komponenta četvorovektora, pa ćemo koristiti notaciju

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ .$$

Slično,

$$\partial^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\nabla \end{pmatrix}$$

su komponente kontravarijantnog vektora.

Dalamberov operator (Dalamberijan) je definisan sa $\Box = g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$. Lako se vidi da je

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \triangle \ .$$

Ovaj operator je skalar, tj.

$$\Box' = \Box \ .$$

Neka je $v(x) = v^\mu(x)\mathbf{e}_\mu$ vektor, tj. vektorsko polje. Kontravarijantne komponente ovog vektora, $v^\mu(x)$ se pri Lorencovim transformacijama transformišu kao

$$v'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu v^\nu(x) \ . \tag{5.1.6}$$

Kovarijantne komponente vektora definisane su sa $v_\mu(x) = g_{\mu\nu}v^\nu(x)$. Pri Lorencovim transformacijama one se transformišu prema

$$v'_\mu(x') = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu v_\nu(x) \ . \tag{5.1.7}$$

Koordinate tačaka Minkovskog prostora x^μ, odnosno x_μ se transformišu po istim pravilima. Ovo je specifičnost prostora Minkovskog. To ne važi generalno, za proizvoljan prostor. Drugim rečima koordinate tačaka prostora ne čine vektore. Npr. na sferi možemo koristiti sferne koordinate θ, φ, ali one nisu komponente vektora.

Tenzor tipa (m, n) se pri Lorencovim transformacijama transformiše na sledeći način:

$$T'^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n}(x') = \Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\dots\Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\dots(\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\ \nu_n}T^{\rho_1\dots\rho_m}{}_{\sigma_1\dots\sigma_n}(x) \ .$$

Kontravarijantni vektor je tenzor tipa $(1, 0)$, a kovarijantni tipa $(0, 1)$.

Element zapremine prostora Minkovskog je $\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}^3x = \mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3$. Za posmatrača iz drugog inercijalnog sistema, ovaj element zapremine je $\mathrm{d}^4x' = \mathrm{d}x'^0\mathrm{d}^3x'$. Ova dva zapreminska elemenata su povezana Jakobijanom:

$$\mathrm{d}^4x' = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|\mathrm{d}^4x \ .$$

Matrični elementi Jakobijeve matrice su

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial(\Lambda^\mu{}_\rho x^\rho)}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho\frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu \ . \tag{5.1.8}$$

Kako je $\det\Lambda = \pm 1$ to dobijamo $\mathrm{d}^4x' = |\det\Lambda|\mathrm{d}^4x = \mathrm{d}^4x$. Dakle, element zapremine u prostoru Minkovskog je invarijanta.

Simbol Levi–Čivita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je totalno antisimetričan pseudotenzor četvrtog ranga[2]. Uzećemo da je $\epsilon^{0123} = 1$. Svaka transpozicija indeksa daje jedan znak minus. Npr. $\epsilon^{1023} = \epsilon^{1230} = -1$, $\epsilon^{2301} =$

[2] Pri transformaciji koordinata $x^\mu \to x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$ pseudotenzor $\tau^{\mu_1\dots\mu_m}_{\nu_1\dots\nu_n}(x)$ se transformiše prema

$$\tau'^{\mu_1\dots\mu_m}_{\nu_1\dots\nu_n}(x') = \frac{J}{|J|}\frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\dots\frac{\partial x'^{\mu_m}}{\partial x^{\rho_m}}\frac{\partial x^{\sigma_1}}{\partial x'^{\nu_1}}\dots\frac{\partial x^{\sigma_n}}{\partial x'^{\nu_n}}\tau^{\rho_1\dots\rho_m}_{\sigma_1\dots\sigma_n}(x) \ ,$$

gde je u transformacionom pravilu, za razliku od običnog tenzorskog zakona transformacije, prisutan znak Jakobijana. Specijalno, pseudotenzori se pri Lorencovim transformacijama transformišu prema

$$\tau'^{\mu_1\dots\mu_m}{}_{\nu_1\dots\nu_n}(x') = \det(\Lambda)\Lambda^{\mu_1}{}_{\rho_1}\dots\Lambda^{\mu_m}{}_{\rho_m}(\Lambda^{-1})^{\sigma_1}{}_{\nu_1}\dots(\Lambda^{-1})^{\sigma_n}_{\ \nu_n}\tau^{\rho_1\dots\rho_m}{}_{\sigma_1\dots\sigma_n}(x) \ .$$

Odredimo sada kako se simbol Levi-Čivita transformiše pri prostornoj inverziji. Matrica prostorne inverzije je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ .$$

Determinanta ove transformacije je -1. Levi Čivita simbol se pri prostornoj inverziji transformiše prema

$$\varepsilon'^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \ ,$$

tj. isti je i u levom i u desnom koordinatnom sistemu.

1 . Ukoliko su dva indeksa simbola Levi-Čivita ista, onda je on jednak nuli; npr. $\epsilon^{0012} = 0$. Simbol Levi–Čivita sa donjim indeksima se dobija spuštanjem indeksa pomoću metričkog tenzora. Važno je uočiti da je $\epsilon_{0123} = -1$.

Mnogi detalji o Lorencovoj grupi dati su u prvoj glavi knjige [11].

5.2 Četvorovektor gustine struje

Naelektrisanje tela je isto za sve posmatrače, tj. ono ne zavisi od toga da li se telo kreće ili miruje. Ovaj rezultat je potvrdjen nizom eksperimenata. Svi elektroni u Svemiru imaju isto naelektrisanje, nezavisno od njihovog relativnog kretanja prema posmatraču. Za jednog posmatrača u maloj zapremini d^3x oko tačke $\mathbf{x}$ u trenutku t nalazi se naelektrisanje $\mathrm{d}q = \rho(\mathbf{x},t)\mathrm{d}^3x$, gde je ρ gustina naelektrisanja. Za drugog inercijalnog posmatrača to naelektrisanje je $\mathrm{d}q' = \rho'(\mathbf{x}',t')\mathrm{d}^3x'$. Invarijantnost naelektrisanja znači da je

$$\rho'(\mathbf{x}',t')\mathrm{d}^3x' = \rho(\mathbf{x},t)\mathrm{d}^3x \ . \tag{5.2.9}$$

Definišimo veličinu

$$J^\mu(t,\mathbf{x}) = \rho(t,\mathbf{x})\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \ . \tag{5.2.10}$$

Ispitajmo kako se ona transformiše pri Lorencovim transformacijama. Krenućemo od izraza za ovu veličinu u primovanom sistemu

$$J'^\mu(t',\mathbf{x}') = \rho'(t',\mathbf{x}')\frac{\mathrm{d}x'^\mu}{\mathrm{d}t'} \ . \tag{5.2.11}$$

Primenom (5.2.9) imamo

$$\begin{aligned} J'^\mu(t',\mathbf{x}') &= \frac{\rho(t,\mathbf{x})\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3x'}\Lambda^\mu{}_\nu\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t'} \\ &= \rho(t,\mathbf{x})\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}^3x'\mathrm{d}t'}\Lambda^\mu{}_\nu\mathrm{d}x^\nu \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu\rho(t,\mathbf{x})\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}t} \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu J^\nu(t,\mathbf{x}) \ , \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

gde smo iskoristili invarijantnost elementa zapremine d^4x. Rezultat koji smo dobili znači da su J^μ komponente jednog četvorovektora. To je tzv. četvorovektor gustine struje. Nulta komponenta četvorovektora gustine struje je $J^0 = c\rho$, dok su prostorne kompnente komponente ovog četvorovektora komponente (tro-)vektora gustine struje. Prema tome

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c\rho \\ \mathbf{j} = \rho\mathbf{v} \end{pmatrix} \ .$$

Gustina naelektrisanja i struje za posmatrača iz inercijalnog sistema S su ρ odnosno $\mathbf{j}$, a za posmatrača iz inercijalnog sistema S' su ρ' odnosno $\mathbf{j}'$. Ako se sistem S' kreće duž x ose brzinom

v onda prema zakonu transformacije $J'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} J^{\nu}$ sledi

$$\begin{pmatrix} c\rho' \\ j'_x \\ j'_y \\ j'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\rho \\ j_x \\ j_y \\ j_z \end{pmatrix} .$$

Primer 1. Naelektrisanje q se kreće ravnomerno, brzinom $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$. U sistemu reference vezanom za ovo naelektrisanje vektor gustine struje je

$$J'^{\mu} = (cq\delta^{(3)}(\mathbf{r}'), \mathbf{j}' = 0)^{\mathrm{T}} .$$

Primenom Lorencovih transformacija pokazati da su komponente četvorovektora gustine struje u laboratorijskom sistemu date sa

$$J^{\mu} = (cq\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \mathbf{j} = q\mathbf{v}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t))^{\mathrm{T}} .$$

Jednačinu kontinuiteta (1.5.33) možemo da prepišemo u obliku

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 ,$$

iz kojeg je jasno da je ona kovarijantna, tj. važi u svim inercijalnim sistemima.

5.3 Četvorovektor potencijala

Jednačine za elektromagnetne potencijale u Lorencovoj kalibraciji su

$$\begin{aligned} \triangle\Big(\frac{\phi}{c}\Big) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{\phi}{c}\Big) &= -\mu_0 c\rho \\ \triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \mathbf{j} . \end{aligned}$$

Koristeći Dalamberov operator ove jednačine imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} \Box\Big(\frac{\phi}{c}\Big) &= \mu_0 c\rho \\ \Box\mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j} . \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

Uvodeći

$$A^{\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} ,$$

prethodne jednačine se mogu zapisati u formi

$$\Box A^{\mu} = \mu_0 J^{\mu} .$$

Kako je Dalamberov operator skalar, a J^μ četvorovektor, onda je uvedena veličina A^μ takodje četvorovektor. On se naziva četvorovektorom potencijala i pri Lorencovim transformacijama menja se prema

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \ . \tag{5.3.14}$$

Potencijal u sistemu S je $A^\mu(x)$, dok je potencijal u primovanom sistemu $A'^\nu(x')$. Pri bustu duž $x-$ose potencijali se menjaju prema

$$\begin{pmatrix} \frac{\phi'}{c} \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\phi}{c} \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \ ,$$

odnosno

$$\phi' = \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , A'_x = \frac{A_x - \frac{v}{c^2}\phi}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , A'_y = A_y, \ \ A'_z = A_z \ . \tag{5.3.15}$$

Lorencov kalibracioni uslov,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \ ,$$

zapisan u kovarijantnoj formi je $\partial_\mu A^\mu = 0$. On ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Dakle, ako u jednom inercijalnom sistemu potencijali zadovoljavaju Lorencov kalibracioni uslov, $\partial_\mu A^\mu = 0$, onda i u svakom drugom inercijalnom sistemu važi $\partial'_\mu A'^\mu = 0$.
Skalarni i vektorski potencijal se pri gauge (kalibracionim) transformacijama menjaju prema

$$\begin{aligned} \phi \quad &\to \phi + \tfrac{\partial\Lambda}{\partial t} \\ \mathbf{A} \quad &\to \mathbf{A} - \nabla\Lambda \ , \end{aligned}$$

što možemo da prepišemo u kovarijantom obliku

$$A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu\Lambda \ .$$

5.4 Tenzor jačine polja. Zakon transformacije jačina polja

Tenzor jačine polja je definisan sa

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ . \tag{5.4.16}$$

On je dva puta kontravarijantan tenzor. To sledi iz zakona transformacije potencijala i parcijalnog izvoda. Pokazali smo da se potencijal $A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})^{\mathrm{T}}$ pri Lorencovim transformacijama transformiše kao četvorovektor

$$A'^\mu(x' = \Lambda x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \ .$$

Zakon transformacije parcijalnog izvoda,

$$\partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\partial^{\nu} \tag{5.4.17}$$

smo ranije pokazali. Dakle, $F^{\mu\nu}$ je dva puta kontravarijantni tenzor, jer se pri Lorencovim transformacijama transformiše prema

$$F'^{\mu\nu}(x' = \Lambda x) = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}F^{\rho\sigma}(x) \ . \tag{5.4.18}$$

Prethodno transformaciono pravilo može biti zapisano u matričnom obliku

$$F'^{\mu\nu} = (\Lambda F \Lambda^{T})^{\mu\nu} \ . \tag{5.4.19}$$

Spuštanjem oba indeksa na kontravarijantnom tenzoru $F^{\mu\nu}$ dobijamo

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \ , \tag{5.4.20}$$

što su dva puta kovarijantne komponente tenzora jačine polja.

Iz definicije tenzora jačine polja je jasno da je on antisimetričan, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Odredimo komponente tenzora jačine polja. Potražimo prvo F_{0i} :

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial A^i}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x^i} \\ &= \frac{E^i}{c} \ . \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

Slično je i

$$\begin{aligned} F_{12} &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \\ &= -B_z \ . \end{aligned} \tag{5.4.22}$$

Preostale komponente se slično nalaze, pa je

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.4.23}$$

Analogno dobijamo

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.4.24}$$

Dakle, komponente tenzora jačine polja $F_{\mu\nu}$ su Dekartove komponente vektora jačine električnog polja i magnetne indukcije.

Sada ćemo naći zakon transformacije električog i magnetnog polja pri bustu duž $x-$ose. Matrica busta je

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Iz (5.4.18) sledi

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{1}{}_{1}F^{01} + \Lambda^{0}{}_{1}\Lambda^{1}{}_{0}F^{10} \\ &= -\gamma^2\frac{E_x}{c} + \beta^2\gamma^2\frac{E_x}{c} = -\frac{E_x}{c} , \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

pa je $E'_x = E_x$. Dalje je

$$\begin{aligned} F'^{12} &= \Lambda^{1}{}_{0}\Lambda^{2}{}_{2}F^{02} + \Lambda^{1}{}_{1}\Lambda^{2}{}_{2}F^{12} \\ &= \frac{\beta\gamma E_y}{c} - \gamma B_z , \end{aligned} \tag{5.4.26}$$

odakle je

$$B'_z = \frac{B_z - \frac{v}{c^2}E_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \tag{5.4.27}$$

Slično se dobijaju i sledeći zakoni transformacije

$$\begin{aligned} E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad E'_z = \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ B'_x &= B_x, \quad B'_y = \frac{B_y + \frac{v}{c^2}E_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

Prethodne formule se mogu generalisati za slučaj proizvoljnog boosta. Neka se sistem S' kreće brzinom $\mathbf{v}$ u odnosu na S. Vektore $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ ćemo razložiti na dve komponente: paralelnu i normalnu. Paralelne komponente polja su kolinearne sa vektorom brzinom $\mathbf{v}$, dok su normalne ortogonalne na brzinu. Zakon transformacije polja je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{E}'_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\perp} = \frac{\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} . \end{aligned} \tag{5.4.29}$$

Formule (5.4.29) možemo zapisati u kompaktnoj formi

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v} \\
\mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{c^2(1+\gamma)}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})\mathbf{v} \ .
\end{aligned} \tag{5.4.30}$$

Zakoni transformacije polja se mogu lako dobiti primenom formule (5.4.19). Za boost duž $x-$ ose imamo

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -\frac{E'_x}{c} & -\frac{E'_y}{c} & -\frac{E'_z}{c} \\ \frac{E'_x}{c} & 0 & -B'_z & B'_y \\ \frac{E'_y}{c} & B'_z & 0 & -B'_x \\ \frac{E'_z}{c} & -B'_y & B'_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&\times \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .
\end{aligned} \tag{5.4.31}$$

Odavde se ponovo dobija (5.4.29).

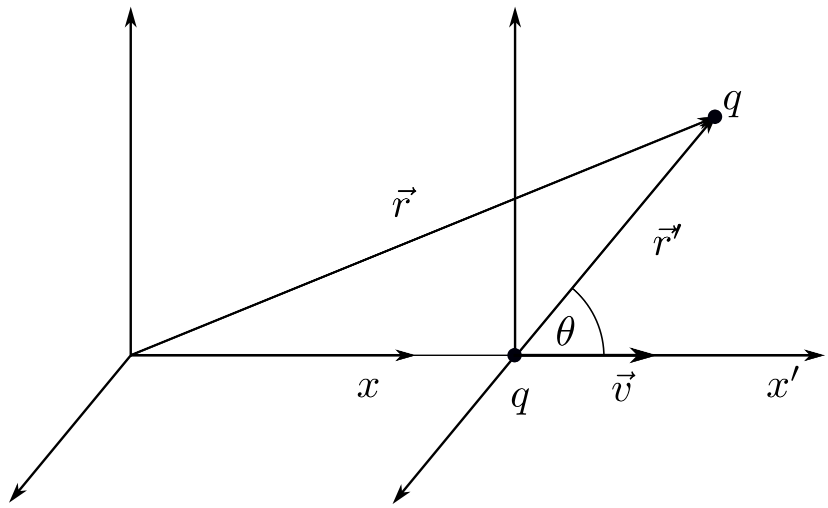
Za male brzine, $v \ll c$ iz (5.4.29) dobijamo zakone transformacije polja u nerelativističkoj aproksimaciji

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}' &= \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\
\mathbf{B}' &= \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E} \ .
\end{aligned}$$

5.5 Elektromagnetno polje naelektrisanja u uniformnom kretanju

Neka se naelektrisanje q kreće konstantnom brzinom v duž $x-$ ose. Odredimo elektromagnetno polje koje generiše ovo naelektrisanje u laboratorijskom sistemu S. Neka je S' sistem vezan za naelektrisanje, kao na slici 5.1. U tom sistemu postoji samo elektrostatičko polje. Potencijali u sistemu vezanom za naelektrisanje su

$$\phi' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'}, \quad \mathbf{A}' = 0 \ . \tag{5.5.32}$$



Slika 5.1:

Koordinate tačke posmatranja u sistemu S' su $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, a u sistemu S su $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Potencijali u laboratorijskom sistemu se dobijaju iz

$$\begin{pmatrix} \phi/c \\ A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi'/c \\ A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} .$$

Odavde je skalarni potencijal dat sa

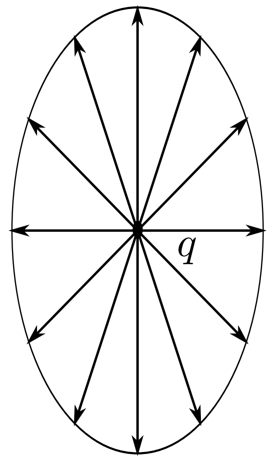
$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)}} . \end{aligned} \tag{5.5.33}$$

Primovane koordinate su izražene preko neprimovanih primenom odgovarajućih Lorencovih transformacija. Dekartove komponente vektorskog potencijala su

$$A_x = \frac{v}{c^2}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{v}{c^2} \frac{q}{\sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)}}, \quad A_y = A_z = 0 . \tag{5.5.34}$$

Koristeći izraze za skalarni i vektorski potencijal možemo odrediti električno polje:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\Big((x - vt)^2 + (1 - \frac{v^2}{c^2})(y^2 + z^2)\Big)^{\frac{3}{2}}} \Big((x - vt)\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3\Big) . \end{aligned} \tag{5.5.35}$$



Slika 5.2: Električno polje čestice u kretanju je anizotropno.

Rezultat za električno polje nam sugeriše da uvedemo vektor $\mathbf{R} = (x - vt, y, z)$. On je relativan radijus vektor u sistemu S izmedju tačke u kojoj se trenutno nalazi naelektrisanje i tačke u kojoj se odredjuje polje. Ovaj vektor se ne poklapa sa $\mathbf{r}'$. Lako se vidi (slika 5.1) da je

$$\begin{aligned} x - vt &= R\cos\theta \\ \sqrt{y^2 + z^2} &= R\sin\theta\ . \end{aligned} \tag{5.5.36}$$

Ugao θ je ugao izmedju vektora $\mathbf{R}$ i $\mathbf{e}_1$ u sistemu S. Električno polje u laboratorijskom sistemu je

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^{3/2}}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ . \tag{5.5.37}$$

Magnetno polje se dobija izračunavanjem rotora vektorskog potencijala. Rezultat za magnetno polje je

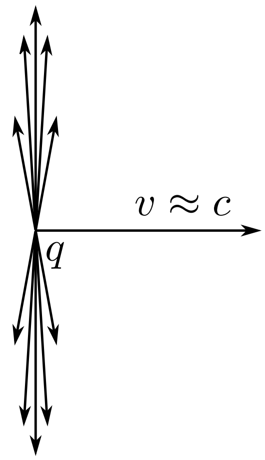
$$\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\ . \tag{5.5.38}$$

Na slici 5.2 prikazana je raspodela vrednosti električnog polja u zavisnosti od pravca. Vidimo da je ono anizotropno, njegova vrednost zavisi od pravca posmatranja. Električno polje ima minimum za uglove $\theta = 0$ i $\theta = \pi$, a maksimum za $\theta = \pi/2$. Dakle, najveće je u transverzalnom, a najmanje u longitudinalnom pravcu u odnosu na pravac kretanja. Lako se vidi da je za male brzine, $v \ll c$ (nerelativistička aproksomacija) jačina električnog polja data sa

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ , \tag{5.5.39}$$

dok je magnetna indukcija

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3}\ . \tag{5.5.40}$$



Slika 5.3: Električno polje ultrarelativističke čestice.

Ovaj izraz direktno daje izraz za magnetnu indukciju stacionarne struje (2.2.49). U ultrareletivističkoj aproksimaciji ($v \approx c$) električno polje je dato sa

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\cos^3\theta} \frac{\mathbf{R}}{R^3} \ . \tag{5.5.41}$$

Električno polje je skoncentrisano u uskoj oblasti, $\theta \approx \pi/2$, što je grafički prikazano na slici 5.3.

5.6 Naelektrisana čestica u elektromagnetnom polju

U ovom poglavlju analiziraćemo kretanje naelektrisanih čestica u elektromagnetnom polju. Naša polazna tačka biće dejstvo za česticu u elektromagnetnom polju. Iz dejstva ćemo naći hamiltonijan i jednačine kretanja čestice.

5.6.1 Dejstvo. Lagranžijan i hamiltonijan

Prvo ćemo se podsetiti Lagranževih jednačina i Hamiltonovog principa [10]. Dejstvo sistema sa konačnim brojem stepeni slobode je

$$S[q] = \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}, t)\mathrm{d}t \ , \tag{5.6.42}$$

gde smo sa q obeležil skup generalisanih koordinata, $q_1, \ldots, q_n$, a sa $\dot{q}$ skup generalisanih brzina $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$. Broj stepeni slobode sistema je n. Sistem od neke početne konfiguracije u početnom trenutku t_i do finalne konfiguracije u t_f može da evoluira na beskonačno puno načina. Prava trajektorija sistema je ona za koju je dejstvo stacionarno, tj. za koju važi

$$\delta S = 0 \ . \tag{5.6.43}$$

Ovo je Hamiltonov princip. Lako se može pokazati da uslov stacionarnosti dejstva daje Lagranževe jednačine kretanja

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\Big) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,\ i = 1, \ldots, n \ . \tag{5.6.44}$$

Za sisteme sa potencijalnim silama i idealnom holonomnim vezama lagranžijan je dat sa

$$L = L(q, \dot{q}) = T - U \ ,$$

gde su T i U kinetička, odnosno potencijalna energija sistema.

Dejstvo je osnovni objekat u teoriji, ono sadrži svu informaciju o sistemu na koji se odnosi. Zbog toga dejstvo mora da ima sve simetrije koju teorija koja opisuje fizički sistem poseduje. Osobine fizičkog sistema se dobijaju na osnovu eksperimenta. Elektrodinamičke jednačine imaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima. Svi eksperimentalni rezultati potvrdjuju ovu činjenicu. Zbog toga je dejstvo skalar, tj. invarijanta pri Lorencovim transformacijama.

Razmatraćemo kretanje naelektrisane čestice u zadatom elektromagnetnom polju, koje zadajemo potencijalom $A^\mu = A^\mu(x)$. Trajektorija čestice $x^\mu = x^\mu(\tau)$, je kriva u u prostoru Minkovskog. Sa τ smo obeležili sopstveno vreme čestice. Kasnije ćemo videti da se jednačina trajektorije može parametrizovati i sa nekim drugim parametrom. Dejstvo je

$$S = \int (-mc\mathrm{d}s - qA^\mu \mathrm{d}x_\mu) + S_f. \tag{5.6.45}$$

Prvi član je dejstvo za slobodnu relativističku česticu, dok drugi član opisuje interakcija naelektrisane čestice sa elektromagnetnim poljem. Kako je polje zadato, treći član koji predstavlja dejstvo slobodnog polja, nećemo razmatrati u ovom poglavlju. Dejstvo (5.6.45) je skalar u odnosu na Lorencove transformacije. Interval izmedju infinitezimalno bliskih tačaka x^μ i $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ je

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}\tau = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t \ . \tag{5.6.46}$$

Kako je

$$A^\mu \mathrm{d}x_\mu = (\phi - \mathbf{A}\cdot\mathbf{v})\mathrm{d}t \ ,$$

to imamo

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\Big(- mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v}\Big) \ . \tag{5.6.47}$$

Izraz u zagradi prethodnog izraza je očigledno lagranžijan

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\mathbf{A}\cdot\mathbf{v} \ . \tag{5.6.48}$$

Lagranžijan L nije skalar.

Da bismo našli hamiltonijan za česticu u elektromagnetnom polju prvo odredjujemo generalisani impuls

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\mathbf{A} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \ , \tag{5.6.49}$$

gde je $\mathbf{p}$ vektor impulsa slobodne relativističke čestice. Generalisani impuls je zbir mehaničkog impulsa i vektorskog potencijala. Hamiltonijan je

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{v}\cdot\mathbf{P} - L \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\phi \\ &= \sqrt{m^2c^4 + c^2(\mathbf{P}-q\mathbf{A})^2} + q\phi \;. \end{aligned} \tag{5.6.50}$$

U poslednjem koraku smo eliminisali brzine preko impulsa, jer hamiltonijan je funkcija koordinata i impulsa. U nerelativističkom limesu Hamiltonijan postaje

$$H = \frac{(\mathbf{P}-q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi \;. \tag{5.6.51}$$

Ovaj izraz za hamiltonijan ćemo iskoristiti da napišemo Šredingerovu jednačinu za česticu u elektromagnetnom polju. Potrebno je da generalisani impuls u hamiltonijanu zamenimo sa odgovarajućim operatorom $-i\hbar\nabla$. Tako dobijamo jednačinu

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \Big[\frac{(-i\hbar\nabla - q\mathbf{A})^2}{2m} + q\phi\Big]\psi \;.$$

5.6.2 Lagranževe jednačine kretanja čestice

Nadjimo Lagranževe jednačine kretanja čestice. Iz (5.6.48), uz primenu (A.0.6), sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} &= \nabla L\Big|_{\mathbf{v}} = -q\nabla\phi + q\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}) \\ &= -q\nabla\phi + q(\mathbf{v}\times \mathrm{rot}\mathbf{A} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A}) \end{aligned}$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \mathbf{p} + q\mathbf{A} \;. \tag{5.6.52}$$

Jednačina kretanja čestice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\Big) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \;,$$

postaje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{p}+q\mathbf{A}) = -q\nabla\phi + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} + q(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} \;. \tag{5.6.53}$$

Kako je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{A} \tag{5.6.54}$$

to iz (5.6.53) sledi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \;. \tag{5.6.55}$$

Dobili smo očekivani rezultat. Na česticu deluje Lorencova sila. Lako se može pokazati da je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} = q\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\ . \tag{5.6.56}$$

Jednačine kretanja, (5.6.55) i (5.6.56) govore o promeni mehaničkog impulsa i energije čestice. One su povezane, jer su i ove fizičke veličine povezane. Medjutim, na osnovu oblika ovih jednačina teško nam je da zaključimo da li su one kovarijantne ili nisu. U narednom poglavlju videćemo da ove jednačine jesu kovarijantne.

Primer 1. Čestica, mase m i naelektrisanja q, kreće se u uzajamno ortogonalnim poljima $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ i $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_y$, pri čemu je $E = cB$. U početnom trenutku čestica se nalazila u koordinatnom početku i imala je impuls $\mathbf{p}_0 = p_0\mathbf{e}_z$. Odrediti zavisnost koordinata čestice x, y, z, t u funkciji sopstvenog vremena τ.

Rešenje: Jednačine kretanja čestice, (5.6.55) i (5.6.56) imaju sledeći oblik:

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = qB(c-\dot{z}) \tag{5.6.57}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{5.6.58}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_z}{\mathrm{d}t} = qB\dot{x} \tag{5.6.59}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = qcB\dot{x}\ . \tag{5.6.60}$$

Iz jednačine (5.6.585.6.60), uz početne uslove navedene u zadatku slede sledeće jednačine

$$\begin{aligned} p_y &= 0 \\ p_z &= qBx + p_{0z} \\ \mathcal{E} &= qcBx + \mathcal{E}_0\ , \end{aligned} \tag{5.6.61}$$

gde je $\mathcal{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2}$. Jednačinu (5.6.57) prepisaćemo u obliku

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{q}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}B(c-\dot{z}) = qB\Big(c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} - \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\Big)\ , \tag{5.6.62}$$

jer je

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\ . \tag{5.6.63}$$

Integracijom dolazimo do $p_x = qB(ct - z)$, odnosno

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{qB}{m}(ct - z)\ . \tag{5.6.64}$$

Analogno, iz (5.6.59), odnosno (5.6.60) dobijamo sledeće diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{qB}{m}x + \frac{p_{0z}}{m} \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{qB}{mc}x + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \ .\end{aligned} \tag{5.6.65}$$

Diferenciranjem jednačine (5.6.64) po sopstvenom vremenu, uz primenu (5.6.65) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{qB}{m^2}\Big(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{0z}\Big) \ , \tag{5.6.66}$$

čijom integracijom dolazimo do

$$x(\tau) = \frac{qB}{2m^2}\Big(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{0z}\Big)\tau^2 \ . \tag{5.6.67}$$

Postupajući na sličan način dolazimo do

$$\begin{aligned}z(\tau) &= \frac{p_{0z}\tau}{m} + \Big(\frac{qB}{m}\Big)^2\frac{1}{6m}\Big(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{0z}\Big)\tau^3 \\ t(\tau) &= \Big(\frac{qB}{m}\Big)^2\frac{1}{6mc}\Big(\frac{\mathcal{E}_0}{c} - p_{0z}\Big)\tau^3 + \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\tau \ .\end{aligned} \tag{5.6.68}$$

5.6.3 Manifestno kovarijantno izvodjenje jednačina kretanja

Kao što smo rekli trajektorija relativističke čestice je $x^\mu = x^\mu(\tau)$, gde smo uzeli da je τ sopstveno vreme. Trajektorija je kriva u prostoru Minkovskog parametrizovana sa τ. Interval $\mathrm{d}s$ izmedju tačaka x^μ i $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ je

$$\mathrm{d}s = \sqrt{g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu} = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau \ . \tag{5.6.69}$$

Početna i krajnja tačka duž trajektorije čestice su dva dogadjaja, koja ćemo obeležiti sa 1, odnosno 2. Dejstvo za slobodnu česticu je

$$S = -mc\int_1^2 \mathrm{d}s = -mc\int_{\tau_1}^{\tau_2}\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}}\mathrm{d}\tau \ . \tag{5.6.70}$$

Ono je proporcionalno dužini krive u prostoru Minkovskog izmedju tačaka $(t_1, \mathbf{x}_1)$ i $(t_2, \mathbf{x}_2)$. Ovo dejstvo je reparametrizaciono invarijantno, tj. umesto parametra τ može se uzeti bilo koji drugi parametar[3], $\tau' = \tau'(\tau)$ ali uz uslov

$$\tau'(\tau_1) = \tau_1, \ \tau'(\tau_2) = \tau_2 \ .$$

---

[3]Izborom $x^0 = c\tau$ ova simetrija se fiksira. Dejstvo tako postaje

$$S = -mc^2\int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \ .$$

Dobli smo tzv. gauge fiksirano dejstvo koje nema reparametrizacionu simetriju.

Dejstvo relativističke čestice u spoljnem polju (5.6.45) postaje

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[mc\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}} + qA_\mu \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\Big]\mathrm{d}\tau \\ &= -\int_{\tau_1}^{\tau_2} \Big[mc\sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} + qA_\mu U^\mu\Big]\mathrm{d}\tau \ , \end{aligned}$$

gde smo uveli četvorobrzinu čestice U^μ. Izraz

$$\tilde{L}(x^\mu(\tau), U^\mu(\tau)) = -mc\sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu} - qA_\mu U^\mu \qquad (5.6.71)$$

je lagranžijan. Ovaj lagranžijan, za razliku od lagranžijana (5.6.48) je Lorencov skalar. Ovaj zaključak je očigledan na osnovu činjenice da je sopstveno vreme, za razliku od laboratorijskog vremena, skalar. Jednačine kretanja čestice,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Big(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial U^\alpha}\Big) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\alpha} = 0 \ , \qquad (5.6.72)$$

dobijene iz ovog Lagranžijana su manifestno kovarijantne. Zamenom

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial U^\alpha} &= -\frac{mc}{\sqrt{g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu}}U_\alpha - qA_\alpha \\ &= -mU_\alpha - qA_\alpha \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x^\alpha} &= -q\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}U_\mu \end{aligned}$$

u jednačine kretanja (5.6.72), dobijamo

$$m\frac{\mathrm{d}U_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = q\Big(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\mu}\Big)U^\mu \ , \qquad (5.6.73)$$

što se može prepisati u obliku

$$m\frac{\mathrm{d}U_\alpha}{\mathrm{d}\tau} = qF_{\alpha\mu}U^\mu \ , \qquad (5.6.74)$$

gde je $F_{\mu\nu}$ tenzor jačine polja. Četvoroimpuls čestice je

$$P^\mu = mU^\mu = \Big(mc\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, m\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}\tau}\Big)^{\mathrm{T}} = \Big(\frac{\mathcal{E}}{c},\ \mathbf{p}\Big)^{\mathrm{T}} \ ,$$

gde je $\mathcal{E}$ energija čestice, a $\mathbf{p}$ njen impuls. Jednačine kretanja (5.6.74) postaju

$$\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = qF^{\mu\nu}U_\nu \ . \qquad (5.6.75)$$

Jednačina kretanja (5.6.75) za $\mu = 0$ je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}P^0}{\mathrm{d}\tau} &= qF^{0i}u_i \\ &= q\Big(-\frac{E^i}{c}\Big)\Big(-\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau}\Big) \ , \end{aligned} \qquad (5.6.76)$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \ . \tag{5.6.77}$$

Za $\mu = 1$ jednačina (5.6.75) je

$$\frac{\mathrm{d}P^1}{\mathrm{d}\tau} = q\Big(F^{10}u_0 + F^{12}u_2 + F^{13}u_3\Big) \ , \tag{5.6.78}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = q\Big(E_x + v_yB_z - v_zB_y\Big) \ . \tag{5.6.79}$$

Analogno se dobija za $\mu = 2$ i $\mu = 3$. Dakle, za $\mu = i = 1, 2, 3$ jednačina (5.6.75) je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}) \ . \tag{5.6.80}$$

Dakle, jednačine kretanja (5.6.77) i (5.6.80) su kovarijantne, tj. važe u svim inercijalnim sistemima reference. Njihova kovarijantnost je očigledna iz obliku (5.6.75), i zato kažemo da su jednačine kretanja zapisane u ovom obliku, manifestno kovarijantne.

5.7 Kovarijantnost Maksvelovih jednačina

5.7.1 Hamiltonov princip i Ojler–Lagranževe jednačine u teoriji polja

Polja su funkcije prostorno-vremenskih koordinata: $x^0, \dots x^3$, i karakterišu se izvesnim transformacionim svojstvima u odnosu na neke transformacije. Električno i magnetno polje su vektorska polja u prostoru R^3. Elongacija čestice, $\eta = \eta(t, \mathbf{r})$, kod mehaničkog talasa je takodje primer polja. Relativistička polja se transformišu na odgovarajući način pri Lorencovim transformacijama.

Neka je $\phi_r = \phi_r(x) \equiv \phi_{r,\mathbf{x}}(t)$ skup polja, gde indeks r prebrojava komponente polja. Iz prethodnog izraza vidimo da diskretni indeks r, kao i kontinulani $\mathbf{x}$ prebrojavaju stepene slobode polja. Jasno je da je polje sistem sa beskonačno puno stepeni slobode. Gustina Lagranžijana je funkcija polja i izvoda polja

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x)) \ . \tag{5.7.81}$$

U opštem slučaju, dejstvo u teoriji polja je oblika

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tL = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L} = \int_\Omega \frac{\mathrm{d}^4x}{c}\mathcal{L} \ ,$$

gde je Lagranžijan

$$L = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{L} \ .$$

Sa Ω smo obeležili oblast integracije. Jednačine kretanja za polja se dobijaju primenom Hamiltonovog principa. Varijacija polja je prelazak sa polja $\phi_r(x)$ na infinitezimalno blisko polje, $\phi'_r(x)$ prema:

$$\phi_r(x) \to \phi'_r(x) = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \ . \tag{5.7.82}$$

Veličina $\delta\phi_r(x)$ je varijacija polja u tački x. Zahtevaćemo da su varijacije polja na granici oblasti, Ω jednake nuli. Varijacija polja i parcijalni izvod komutiraju, što se vidi iz

$$\delta(\partial_\mu\phi_r) = \partial_\mu\phi'_r(x) - \partial_\mu\phi_r(x) = \partial_\mu(\delta\phi_r(x)) \ . \tag{5.7.83}$$

Varijacija dejstva je njegova infinitezimalna promena uzrokovana promenom polja, tj.

$$c\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\mathcal{L}(\phi'_r(x), \partial_\mu\phi'_r(x)) - \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu\phi_r(x))\Big) \ . \tag{5.7.84}$$

Primenom Tejlorovog razvoja dobijamo

$$c\delta S = \int_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\partial_\mu(\delta\phi_r)\Big) \ . \tag{5.7.85}$$

Primenom parcijalne integracije i Gausove teoreme imamo

$$\begin{aligned} c\delta S &= \int_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r}\delta\phi_r + \frac{\partial}{\partial x^\mu}\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r\Big) - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big)\delta\phi_r\Big) \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big)\Big)\delta\phi_r + \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\delta\phi_r \mathrm{d}\Sigma_\mu \\ &= \int_\Omega \mathrm{d}^4x \Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big)\Big)\delta\phi_r \ . \end{aligned} \tag{5.7.86}$$

Površinski integral je jednak nuli, jer je varijacija polja na granici oblasti integracije nula. Na osnovu Hamiltonovog principa, $\delta S = 0$, slede Ojler–Lagranževe jednačine kretanja za polja

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu\Big(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)}\Big) = 0 \ . \tag{5.7.87}$$

5.7.2 Dejstvo

U prethodnom poglavlju videli smo da je interakcija naelektrisanja q sa elektromagnetnim poljem opisana sa sledećim interakcionim članom u dejstvu:

$$S_{\rm int} = -q\int A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu \ .$$

Očigledno je da u slučaju sistema od N naelektrisanih čestica interakcioni član postaje

$$S_{\rm int} = -\sum_{a=1}^{N}\int q_a A_\mu dx_a^\mu \ . \tag{5.7.88}$$

Indeks a prebrojava čestice; q_a je naelektrisanje čestice indeksa a, $\mathrm{d}x_a^\mu$ je diferencijal duž trajektorije $a-$te čestice. Interakcioni član ćemo prepisati u obliku[4]

$$S_{\rm int} = -\sum_a q_a\int\Big(cA^0(x_a) + A_i(x_a)\frac{\mathrm{d}x_a^i}{\mathrm{d}t}\Big)\mathrm{d}t \ .$$

[4]Laboratorijsko vreme je isto za sve čestice.

Zatim, da bismo prešli sa integracije po vremenu na integraciju po prostoru Minkovskog, ubacićemo trodimenzionu delta funkciju

$$S_{\rm int} = -\int {\rm d}t \int {\rm d}^3 r \Big(\sum_{a=1}^{N} q_a \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) c A_0(\mathbf{r}, t) + \sum_{a=1}^{N} q_a v_a^i A_i(\mathbf{r}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \Big) \ .$$

Konačno, interakcioni član postaje

$$\begin{aligned} S_{\rm int} &= -\frac{1}{c} \int {\rm d}^4 x \Big(c\rho(\mathbf{r}, t) A_0(\mathbf{r}, t) + J^i(\mathbf{r}, t) A_i(\mathbf{r}, t) \Big) \\ &= -\frac{1}{c} \int {\rm d}^4 x J^\mu A_\mu \ . \end{aligned} \tag{5.7.89}$$

Član u lagranžijanu koji opisuje interakciju elektromagnetnog polja sa naelektrisanjem je proizvod gustine struje i potencijala.

Recimo još jednom da dejstvo za sistem koji čine čestice i elektromagnetno polje ima oblik

$$S = S_c + S_{\rm int} + S_p \ . \tag{5.7.90}$$

Poslednji član u dejstvu, S_p je dejstvo elektromagnetnog polja. Da bi jednačine kretanja elektromagnetnog polja bile kovarijantne dejstvo mora biti Lorencov skalar. Takodje, jednačine kretanja su linearne po potencijalima, što znači da je dejstvo kvadratno. Dato je sa

$$S_p = -\frac{1}{4\mu_0 c} \int {\rm d}^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ . \tag{5.7.91}$$

Prepišimo još jednom dejstvo (5.7.90)

$$S = -\sum_a m_a c \int {\rm d}s_a - \frac{1}{c} \int {\rm d}^4 x J^\mu A_\mu - \frac{1}{4\mu_0 c} \int {\rm d}^4 x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ . \tag{5.7.92}$$

Gustina Lagranžijana je

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\rm ces} - A^\mu J_\mu - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \ , \tag{5.7.93}$$

gde je prvi član $\mathcal{L}_{\rm ces}$ gustina lagranžijana čestica.

5.7.3 Maksvelove jednačine

Jednačine kretanja za potencijale elektromagnetnog polja su

$$\partial_\alpha \Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \Big) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = 0 \ . \tag{5.7.94}$$

Da bismo sastavili jednačine kretanja za potencijale, moramo prvo odrediti parcijalne izvode

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\beta} = -J^\beta \ , \tag{5.7.95}$$

i

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} &= -\frac{1}{2\mu_0}F^{\mu\nu}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}F^{\mu\nu}(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\beta_\mu\delta^\alpha_\nu) \\
&= -\frac{1}{2\mu_0}(F^{\alpha\beta} - F^{\beta\alpha}) \\
&= -\frac{1}{\mu_0}F^{\alpha\beta} \ .
\end{aligned}
$$

Jednačine kretanja su

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \mu_0 J^\beta \ . \tag{5.7.96}$$

Dobili smo četiri jednačine. Za $\beta = 0$ jednačina je $\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \mu_0 J^0$, odnosno

$$\frac{1}{c}\partial_i E^i = \mu_0 c\rho \ . \tag{5.7.97}$$

To je prva Maksvelova jednačina,

$$\mathrm{div}\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \ . \tag{5.7.98}$$

Za $\beta = 1$ imamo

$$\partial_0 F^{01} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} = \mu_0 J^1 \tag{5.7.99}$$

odnosno

$$(\mathrm{rot}\mathbf{B})_x = \mu_0 j_x + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} \ , \tag{5.7.100}$$

što je x komponenta četvrte Maksvelove jednačine. Jasno je da $\beta = 2, 3$ su y odnosno z komponenta iste jednačine. Dakle, (5.7.96) su Maksvelove jednačine sa izvorima. Dobili smo ih variranjem dejstva.

Uvrštavanjem izraza za jačinu polja u (5.7.96) dobijamo

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \mu_0 J^\nu \ , \tag{5.7.101}$$

odnosno

$$\Box A^\nu - \partial^\nu\partial_\mu A^\mu = \mu_0 J^\nu \ . \tag{5.7.102}$$

To su jednačine za potencijale koje smo izveli ranije. U Lorencovoj kalibraciji one su

$$\Box A^\nu = \mu_0 J^\nu \ . \tag{5.7.103}$$

Iz definicije tenzora jačine polja sledi da je sledeći identitet

$$\partial_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\rho F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\rho} = 0 \tag{5.7.104}$$

zadovoljen. Ovo se lako proverava:

$$\partial_\mu(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) + \partial_\rho(\partial_\sigma A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) + \partial_\sigma(\partial_\rho A_\mu - \partial_\mu A_\sigma) = 0 \ . \tag{5.7.105}$$

Iz prethodnog identiteta slede druga i treća Maksvelova jednačina. Npr.

$$\partial_1 F_{23} + \partial_2 F_{31} + \partial_3 F_{12} = 0 \tag{5.7.106}$$

je

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \ . \tag{5.7.107}$$

Na osnovu oblika (5.7.104) zaključujemo da su druga i treča Maksvelova jednačina kovarijantne. Bezizvorne Maksvelove jednačine se ne dobijaju variranjem dejstva (5.7.92). One su kinematički uslovi.

Jednačine (5.7.104) možemo prepisati u sledećem obliku

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \ . \tag{5.7.108}$$

Tenzor koji se pojavljuje na levoj strani gornje jednačine,

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} \tag{5.7.109}$$

je dualni tenzor jačine polja.

Videli smo da je veličina $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ invarijanta. Lako se vidi da je

$$I_1 = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2 \ .$$

Definisaćemo još jednu invarijantu elektromagnetnog polja

$$I_2 = -\frac{c}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{B} \ .$$

Iz invarijantnosti izraza $\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$ na Lorencove transformacije, sledi da ako su električno i magnetno polje ortogonalni u jednom sistemu, onda su oni ortogonalni u svim inercijalnim sistemima.

5.8 Prostorna i vremenska inverzija

Pod relativističkom kovarijantnošću neke teorije podrazumeva se njena kovarijantnost na bustove i rotacije. Ove Lorencove transformacije zadovoljavaju sledeća dva uslova

$$\det\Lambda = 1, \quad {\Lambda^0}_0 \geq 1 \tag{5.8.110}$$

i nazivaju se pravim ortohronim Lorencovim transformacijama. Prave ortohrone Lorencove transformacije čine podgrupu cele Lorencove grupe. Ta podgrupa, ne sadrži inverzije, već kao što smo rekli, samo one Lorencove transformacije povezane sa jedinicom, a to su rotacije i bustovi.

Razmotrimo sada kako se Maksvelove jednačine ponašaju pri inverziji prostora. Prostorna inverzija je definisana sa

$$t \to t' = t, \ \mathbf{r} \to \mathbf{r}' = -\mathbf{r} \ . \tag{5.8.111}$$

Matrica ove transformacije je

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ona je Lorencova transformacija, jer zadovoljava uslov $\Lambda^T g \Lambda = g$. Ova transformacija nije povezana neprekidnom transformacijom sa jediničnim elementom Lorencove grupe. Prostorna inverzija je diskretna transformacija. Pri prostornoj inverziji brzina menja znak

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \to \mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}'}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{v} \ . \tag{5.8.112}$$

Vektori koji pri prostornoj inverziji menjaju znak nazivaju se pravim vektorima. Slično se vidi da ubrzanje menja znak pri prostornoj inverziji, pa je i ono pravi vektor. Iz $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sledi da sila menja znak pri prostornoj inverziji. Iz izraza za Lorencovu silu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ ,$$

sledi da pri prostornoj inverziji električno polje menja znak, a magnetno polje ne menja znak. Električno polje je pravi vektor, dok je magnetna indukcija aksijalni ili pseudo vektor. Dakle:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, t' = t) &= -\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}'(\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, t' = t) &= \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \ . \end{aligned} \tag{5.8.113}$$

Naelektrisanje $q = \int \mathrm{d}^3 r \rho(\mathbf{r}, t)$ se ne menja pri prostornoj inverziji. Odavde sledi zakon transformacije gustine naelektrisanja

$$\rho'(\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, t' = t) = \rho(\mathbf{r}, t) \ . \tag{5.8.114}$$

Vektor gustine struje, $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ menja znak pri prostornoj inverziji

$$\mathbf{j}'(\mathbf{r}' = -\mathbf{r}, t' = t) = -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \ . \tag{5.8.115}$$

Sada je lako pokazati da su Maksvelove jednačine invarijantne pri prostornoj inverziji. Npr. ako podjemo od treće Maksvelove jednačine u primovanom sistemu

$$\mathrm{rot}'\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = -\frac{\partial \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \tag{5.8.116}$$

i primenimo gornje zakone transformacija dobićemo

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ . \tag{5.8.117}$$

Treća Maksvelova jednačina ne menja oblik pri prostornoj inverziji. Slično se proverava kovarijantnost preostale tri jednačine.

Neka je $x' = R_{ij}x_j$, gde je R ortogonalna trodimenzionalna matrica, tj. matrica koja zadovoljava uslov $R^{\mathrm{T}}R = I$. Prave rotacije (koje zovemo samo rotacijama) su one ortogonalne transformacije za koje je $\det R = 1$. Ako je $\det R = -1$ takve ortogonalne transformacije nazivamo nepravim rotacijam. Inverzija prostora pripada nepravim rotacijama. Tenzore u euklidskom prostoru smo definisali ranije. Sada ćemo da definišemo pseudotenzore. Skup od 3^N veličina, $\tau_{i_1\dots i_N}$ je pseudotenzor, ako se pri ortogonalnim transformacijama transformiše prema

$$\tau'_{i_1\dots i_N}(x') = (\det R)R_{i_1j_1}\dots R_{i_Nj_N}\tau_{j_1\dots j_N}(x) \ .$$

Tenzori i pseudotenzori se na isti način transformišu pri pravim rotacijama, ali različito pri nepravim rotacijama. Matrica prostorne inverzije je $R_{ij} = -\delta_{ij}$, pa se pseudotenzor sa N indeksa pri inverziji prostora transformiše prema

$$\tau'_{i_1\dots i_N}(x') = (-1)^{N+1}\tau_{i_1\dots i_N}(x) \ .$$

Pravi euklidski tenzor sa N indeksa pri prostornoj refleksiji transformiše sa faktorom $(-1)^N$, dok pseudotenzor sa faktorom $(-1)^{N+1}$. Već smo rekli da su električno, odnosno magnetno polje primeri pravog vektora, odnosno pseudovektora. Simbol Levi–Čivita pri prostornoj inverziji transformiše se prema

$$\varepsilon'_{ijk} = -(-\delta_{im})(-\delta_{jn})(-\delta_{kp})\varepsilon_{mnp} = \varepsilon_{ijk} \ , \tag{5.8.118}$$

pa je on takodje pseudotenzor.

Vremenska inverzija je definisana sa

$$t \to t' = -t, \ \mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} \ . \tag{5.8.119}$$

Matrica ove transformacije je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Vremenska inverzija zadovoljava uslov $\Lambda^T g\Lambda = g$, pa ona jeste Lorencova transformacija. Kao i prostorna inverzija, ona nije povezana sa jediničnom transformacijom. Pri vremenskoj inverziji brzina čestice menja znak

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \to \mathbf{v}' = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t'} = -\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -\mathbf{v} \ . \tag{5.8.120}$$

Ubrzanje ne menja znak pri vremenskoj inverziji. Iz $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ sledi da i sila ne menja znak pri vremenskoj inverziji. Iz izraza za Lorencovu silu

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

sledi da pri vremenskoj inverziji električno polje ne menja znak, a magnetno polje menja znak. Dakle:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = -t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}'(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = -t) &= -\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \ . \end{aligned} \tag{5.8.121}$$

Zakon transformacije zapreminske gustine naelektrisanja i struje pri vremenskoj inverziji je

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = -t) &= \rho(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{j}'(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = -t) &= -\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \ . \end{aligned} \tag{5.8.122}$$

Pokažimo da je (2.4.87) invarijantna na vremensku inverziju. Iz

$$\mathrm{rot}'(\mathbf{E}'(\mathbf{r}, -t)) = -\frac{\partial(\mathbf{B}'(\mathbf{r}, -t))}{\partial t'} \tag{5.8.123}$$

sledi

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ . \tag{5.8.124}$$

Slično se pokazuje i da su preostale tri Maksvelove jednačine invarijantne na vremensku inverziju.

5.9 Kovarijantnost Maksvel-Lorencovih jednačina

Zapreminska gustina naelektrisanja i struje koje potiču od vezanih naelektrisanja čine četvorovektor

$$J^{\mu}_{\mathrm{vez}} = \begin{pmatrix} c\rho_{\mathrm{vez}} \\ \mathbf{j}_{\mathrm{vez}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c\mathrm{div}\mathbf{P} \\ \mathrm{rot}\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \end{pmatrix} \ . \tag{5.9.125}$$

To je četvorovektor gustine struje vezanih naelektrisanja. Koristeći ovaj četvorovektor prvu i poslednju Maksvel–Lorencovu jednačinu možemo prepisati u obliku

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 (J^\nu + J^\nu_{\mathrm{vez}}) \ , \tag{5.9.126}$$

gde je J_ν četvorovektor gustine struje eksternih i slobodnih naelektrisanja. Uvedimo tenzor $M_{\mu\nu}$ sa

$$M_{\mu\nu} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & -cP_x & -cP_y & -cP_z \\ cP_x & 0 & -M_z & M_y \\ cP_y & M_z & 0 & -M_x \\ cP_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.9.127}$$

Lako se vidi da važi

$$\mu_0 J_{\nu\mathrm{vez}} = \partial^\mu M_{\mu\nu} \ . \tag{5.9.128}$$

Poslednja relacija potvrdjuje da je $M_{\mu\nu}$ tenzor drugog reda. Iz (5.9.126) sledi

$$\partial_\mu (F^{\mu\nu} - M^{\mu\nu}) = \mu_0 J^\nu \tag{5.9.129}$$

odnosno

$$\partial_\mu H^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \tag{5.9.130}$$

gde je

$$H_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{D_x}{\varepsilon_0 c} & \frac{D_y}{\varepsilon_0 c} & \frac{D_z}{\varepsilon_0 c} \\ -\frac{D_x}{\varepsilon_0 c} & 0 & -\mu_0 H_z & \mu_0 H_y \\ -\frac{D_y}{\varepsilon_0 c} & \mu_0 H_z & 0 & -\mu_0 H_x \\ -\frac{D_z}{\varepsilon_0 c} & -\mu_0 H_y & \mu_0 H_x & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{5.9.131}$$

Jednačine (5.9.130) su kovarijantni zapis prve i četvrte Maksvel–Lorencove jednačine. Druga i treća jednačina u kovarijantnom obliku su date sa (5.7.104). Iz zakona transformacije tenzora $M^{\mu\nu}$ lako se nalaze zakoni transformacije polarizacije i magnetizacije pri prelasku iz sistema S u sistem S' koji se kreće konstantnom brzinom $\mathbf{V}$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}'_{\parallel} &= \mathbf{P}_{\parallel}, \quad \mathbf{P}'_{\perp} = \frac{\mathbf{P}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{M}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{M}'_{\parallel} &= \mathbf{M}_{\parallel}, \quad \mathbf{M}'_{\perp} = \frac{\mathbf{M}_{\perp} + \mathbf{V}\times\mathbf{P}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; . \end{aligned} \tag{5.9.132}$$

Analogno, zakon transformacije $H^{\mu\nu}$ daje zakone trensformacije

$$\begin{aligned}\mathbf{D}'_{\parallel} &= \mathbf{D}_{\parallel}, \quad \mathbf{D}'_{\perp} = \frac{\mathbf{D}_{\perp} + \frac{1}{c^2}\mathbf{V}\times\mathbf{H}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ \mathbf{H}'_{\parallel} &= \mathbf{H}_{\parallel}, \quad \mathbf{H}'_{\perp} = \frac{\mathbf{H}_{\perp} - \mathbf{V}\times\mathbf{D}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \; . \end{aligned} \tag{5.9.133}$$

Neka se dielektrik bez disperzije kreće stalnom brzinom $\mathbf{v}$. Nadjimo elektrodinamičke jednačine ovog dielektrika u laboratorijskom sistemu. Za dielektrik ćemo vezati primovan sistem, i sve veličine u ovom sistemu obeležićemo primovima. U sistemu mirovanja dielektrika je

$$\begin{aligned}\mathbf{D}' &= \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}' \\ \mathbf{B}' &= \mu_0\mu\mathbf{H}' \; . \end{aligned} \tag{5.9.134}$$

Primenom transformacionih zakona (5.9.133) i (5.4.29) možemo u gornjim jednačinama eliminisati primovane veličine preko neprimovanih i tako naći supstancijalne jednačine u laboratorijskom sistemu. Posle pravolinjskog računa dobijaju se sledeće relacije

$$\begin{aligned}\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\times\mathbf{H}) &= \varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}) \\ \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V}\times\mathbf{E}) &= \mu_0\mu(\mathbf{H}-\mathbf{V}\times\mathbf{D}) \; . \end{aligned} \tag{5.9.135}$$

Ove realcije je prvi izveo Minkovski, i po njemu se one nazivaju Minkovskijeve relacije. Pri izvodjenju ovih relacija pretpostavili smo da se sredina kreće stalnom brzinom. Medjutim, ove relacije važe i kad to nije slučaj. Možemo ih primenjivati lokalno. Različiti delići sredine se kreću različitim brzinama, ali za svaki uočeni delić možemo preći u sistem u kome on trenutno miruje i koji je inercijalan u infinitezimalno malom vremenskom intervalu. Ako je sredina provodna i ako u sistemu vezanom za nju važi Omov zakon $\mathbf{j}' = \sigma\mathbf{E}'$, onda se lako dobija da u laboratorijskom sistemu važi

$$\mathbf{j} = \sigma\frac{\mathbf{E}+\mathbf{V}\times\mathbf{B}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{V^2}{c^2}\frac{\sigma\mathbf{E}_{\parallel}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} + \rho\mathbf{V} \; . \tag{5.9.136}$$

U nerelativističkom limesu $V \ll c$, gustina struje je data sa

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \rho\mathbf{V} \ . \tag{5.9.137}$$

Ovo je generalisani Omov zakon.

Primer 1 Dugačak valjak radijusa R napravljen je od materijala permanentne polarizacije. Vektor polarizacije u valjku je data sa $\mathbf{P} = a\rho\mathbf{e}_\rho$, gde je a konstanta.

a) Naći raspodelu vezanih naelektrisanja pa na osnovu toga odrediti raspodelu vezanih struja ako valjak rotira oko ose simetrije konstantnom ugaonom brzinom $\omega = \omega\mathbf{e_z}$, pri čemu je $\omega R \ll c$.

b) Naći gustinu vezanih struja primenom zakona transformacije (5.9.132)

c) odrediti $\mathbf{B}$

Rešenje: a)Iz $\mathbf{P} = a\rho\mathbf{e}_\rho$ sledi $\rho_{\rm vez} = -{\rm div}\mathbf{P} = -2a$. Na omotaču valjka za posmatrača za koga uočeni delić na obodu valjka miruje, normalna komponenta polarizacije trpi skok koji daje vezana površinska naelektrisanja $\sigma_{\rm vez} = aR$. Odavde je

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{\rm vez} &= \rho_{\rm vez}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) = -2a\omega\rho\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{i}_{\rm vez} &= \sigma_{\rm vez}R\omega\mathbf{e}_\phi = aR^2\omega\mathbf{e}_\phi \ . \end{aligned} \tag{5.9.138}$$

b) Iz zakona transformacije polarizacije i magnetizacije sledi da je magnetizacija u laboratorijskom sistemu

$$\mathbf{M}_{\rm lab} = -\mathbf{v} \times \mathbf{P} = a\omega\rho^2\mathbf{e}_z \ . \tag{5.9.139}$$

a polarizacija $\mathbf{P}_{\rm lab} = \mathbf{P}$. Gustina struje je onda

$$\mathbf{j}_{\rm vez} = {\rm rot}\mathbf{M}_{\rm lab} + \frac{\partial\mathbf{P}_{\rm lab}}{\partial t}$$

odakle se lako nalazi

$$\mathbf{j}_{\rm vez} = -2a\omega\rho\mathbf{e}_\phi \ .$$

Iz graničnog uslova za skok tangencijalne komponente magnetizacije dobija se $\mathbf{i}_{\rm vez}$.

c) Amperova teorema

$$\oint \mathbf{B} \cdot {\rm d}\mathbf{l} = \mu_0 \int \mathbf{j}_{\rm vez} \cdot {\rm d}\mathbf{S}$$

daje

$$\mathbf{B} = \mu_0 a\omega\rho^2\mathbf{e_z}$$

unutar valjka. Smislite još neki način da nadjete $\mathbf{B}$, npr. krenite od izraza za cirkulaciju $\mathbf{H}$.

Primer 2 U sistemu reference u kome sredina miruje jednačine sredine su date sa (5.9.134). Pokazati da u inercijalnom sistemu u kome se sredina kreće brzinom $\mathbf{V}$ važe sledeće elektrodinamičke jednačine sredine

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + \gamma^2\varepsilon_0\Big(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\Big)\Big(\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \frac{V^2}{c^2}\mathbf{E}_\perp\Big) \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu} + \epsilon_0\Big(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\Big)\gamma^2\Big(\mathbf{V} \times \mathbf{E} - V^2\mathbf{B}_\perp\Big) \ . \end{aligned} \tag{5.9.140}$$

U nerelativističkom limesu ove relacije postaju

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon_0\Big(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\Big)\mathbf{V}\times\mathbf{B} \tag{5.9.141}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0\mu} + \epsilon_0\Big(\varepsilon - \frac{1}{\mu}\Big)\mathbf{V}\times\mathbf{E}\ . \tag{5.9.142}$$

Rešenje: Poći od

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_\parallel + \mathbf{D}_\perp\ . \tag{5.9.143}$$

Primenom (5.9.133) i jednačina sredine u sistemu mirovanja dobijamo vektor indukcije $\mathbf{D}$ izražen preko električnog i magnetnog polja u sopstvenom sistemu. Dalje je potrebno da se primene relacije (5.4.29). Sredjivanjem ovog izraza dobija se prva relacija u (5.9.140). Druga relacija se pokazuje analogno. Ove relacije sadrže istu fizičku informaciju kao relacije Minkovskog (5.9.135). Nerelativističke relacije se lako dobijaju i iz (5.9.135).

Primer 3 Nemagnetni valjak radijusa a i permitivnosti ε kreće se duž svoje ose simetrije stalnom brzinom $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ u konstantnom magnetnom polju $\mathbf{B} = -B\mathbf{e}_y$. Naći električno polje u svakoj tački prostora ako je $v \ll c$.

Rešenje: Primenom (5.9.141) dobijamo da je vektor električne indukcije u laboratorijskom sistemu dat sa

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon_0(\varepsilon - 1)vB\mathbf{e}_x\ . \tag{5.9.144}$$

Kako je magnetno polje konstantno to je $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$, pa je $\mathbf{E} = -\nabla\phi_1$. Kombinovanjem ovih relacija sa prvom Maksvelovom jednačinom dobijamo

$$\triangle\phi_1 = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\mathrm{div}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\ , \tag{5.9.145}$$

odnosno

$$\triangle\phi_1 = 0\ . \tag{5.9.146}$$

Skalarni potencijal zadovoljava Laplasovu jednačinu za $r \leq a$. U oblasti $r \geq a$ potencijal ćemo obeležiti sa ϕ_2 i on takodje zadovoljava Laplasovu jednačinu. Granični uslovi su

$$\begin{aligned} &\phi_1(a) = \phi_2(a) \\ &\varepsilon\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\Big|_{r=a} - \frac{\partial\phi_2}{\partial r}\Big|_{r=a} = (\varepsilon - 1)vB\cos\varphi\ . \end{aligned} \tag{5.9.147}$$

Metodom razdvajanja promenljivih možemo odrediti potencijal. Medjutim, na osnovu graničnih uslova je očigledno da potencijal ima oblik

$$\phi = \begin{cases} \phi_1 = F_1(r)\cos\varphi, & r \leq a, \\ \phi_2 = F_2(r)\cos\varphi, & r \geq a. \end{cases} \tag{5.9.148}$$

Funkcije $F_1(r)$ i $F_2(r)$ zadovoljavaju Ojlerovu jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}r} - \frac{F}{r^2} = 0\ . \tag{5.9.149}$$

Lako se vidi da su partikularna rešenja ove jednačine $F = r$ i $F = 1/r$, pa u skladu sa činjenicom da potencijal ne divergira na osi simetrije valjka i da u beskonačnosti nemamo električno polje, sledi

$$\begin{aligned} \phi_1 &= Ar\cos\varphi \\ \phi_2 &= \frac{B}{r}\cos\varphi \ , \end{aligned} \tag{5.9.150}$$

gde su A i B konstante. Ove konstante odredjujemo iz graničnih uslova na površini valjka. Rezultat je

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}vBr\cos\varphi \\ \phi_2 &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{a^2vB}{r}\cos\varphi \ . \end{aligned} \tag{5.9.151}$$

Električno polje je

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}vB\mathbf{e}_x \\ \mathbf{E}_2 &= \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{a^2vB}{r^2}(\cos\varphi\mathbf{e}_r + \sin\varphi\mathbf{e}_\varphi) \ . \end{aligned} \tag{5.9.152}$$

Primer 4 Dugački nemagnetni valjak poluprečnika a i permitivnosti ε rotira oko svoje ose simetrije stalnom ugaonom brzinom $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{e}_z$. Valjak se nalazi u stalnom magnetnom polju koje je paralelno sa osom valjka, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$. Odrediti polarizaciona naelektrisanja u valjku.

Rešenje: Vektor indukcije je

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon_0(\varepsilon-1)\omega Br\mathbf{e}_r \ . \tag{5.9.153}$$

Pokazati da potencijal električnog polja zadovoljava jednačinu

$$\triangle\phi = 2\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\omega B \ , \tag{5.9.154}$$

odakle je

$$\phi = \frac{\varepsilon-1}{2\varepsilon}\omega Br^2 \ . \tag{5.9.155}$$

Električno polje u valjku je

$$\mathbf{E} = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\omega Br\mathbf{e}_r \ . \tag{5.9.156}$$

Lako se vidi da je u valjku vektor indukcije jednak nuli, pa je polarizacija $\mathbf{P} = -\varepsilon_0\mathbf{E}$, odakle je

$$\sigma_p = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\omega aB \ , \tag{5.9.157}$$

$$\rho_p = -2\frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\omega B \ . \tag{5.9.158}$$

5.10 Integralni oblik Maksvel-Lorencovih jednačina

U ovom poglavlju naći ćemo integralni oblik Maksvel-Lorencovih jednačina. Ovo poglavlje je moglo biti izloženo ranije, odmah posle poglavlja 3.1. Medjutim, mi ga izlažemo sada, da bismo mogli neke od rezultata povezati sa zakonima transformacije polja.

Integracija prve Maksvel–Lorencove jednačine (3.1.34) po zapremini V daje

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{D}\mathrm{d}^3 r = \int_V \rho \mathrm{d}^3 r \ . \tag{5.10.159}$$

Primenom Gausove teoreme dobijamo

$$\oint_{\partial V} \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \rho \mathrm{d}^3 r \ , \tag{5.10.160}$$

što je integralni oblik prve Maksvel-Lorencove jednačine. Fluks vektora električne indukcije kroz zatvorenu površinu jednak je ukupnom makroskopskom i spolja unetom naelektrisanju koje se nalazi u zapremini čija je granica zatvorena površina. Vektor električne indukcije $\mathbf{D}$ ne vidi polarizaciono naelektrisanje.

Slično, iz druge jednačine (3.1.35) sledi

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = 0 \ . \tag{5.10.161}$$

Fluks vektora magnetne indukcije kroz ma koju zatvorenu površinu je nula.

Integracijom Faradejevog zakona (3.1.36) po površini S dobijamo

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{5.10.162}$$

Primenom Stoksove teoreme dobijamo

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{5.10.163}$$

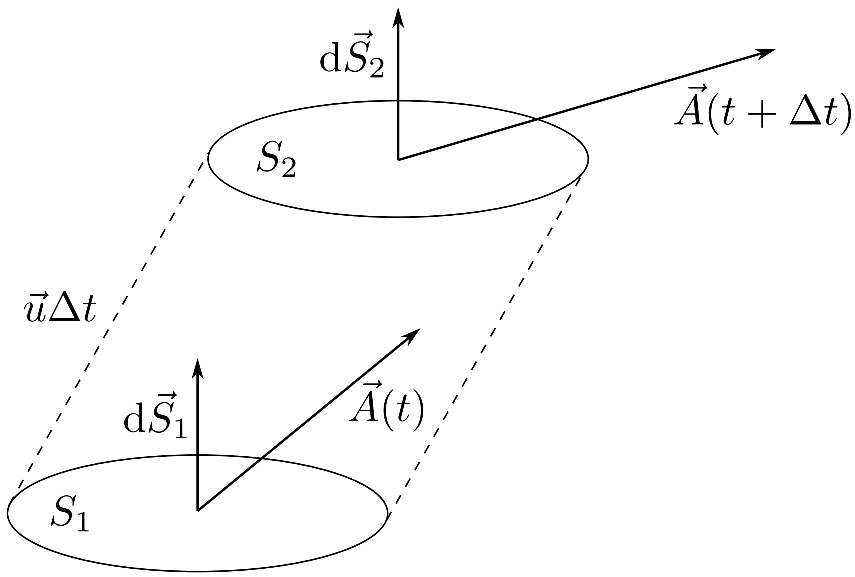
Ako pretpostavimo da je kontura integracije, $C = \partial S$ nepokretna, onda je

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{5.10.164}$$

Kao što smo ranije rekli cirkulacija vektora jačine električnog polja je elektromotorna sila. Slično, ako je kontura C nepokretna dobija se

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{5.10.165}$$

To je integralni oblik jednačine (3.1.37).



Slika 5.4: Kretanje konture.

U nepokretnom provodniku koji se nalazi u promenljivom magnetnom polju indukovaće se struja. Madjutim, struja će se indukovati u provodniku koji se kreće u stalnom magnetnom polju. Zato ćemo sada analizirati slučaj kada je kontura integracije, C pokretna.

Neka je $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ vektorsko polje. Nadjimo vremenski izvod fluksa ovog polja kroz pokretnu površ. Kretanje površi, odnosno konture, koja je njena granica, je zadato sa poljem $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{r})$. Na slici 5.4 prikazali smo položaje konture u trenutku t, odnosno u $t + \Delta t$. Neka je $S(t) = S_1$ površ u trenutku t, a $S(t+\Delta t) = S_2$ površ u trenutku $t+\Delta t$. Kontura pri svom kretanju opisuje telo čija je izvodnica $\mathbf{u}\Delta t$. Po definiciji izvod fluksa vektorskog polja je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)} \mathbf{A}(t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{A}(t+\Delta t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{A}(t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}}{\Delta t} \ . \tag{5.10.166}$$

Neka je ΔV zapremina tela koje nastaje pri kretanju konture. Baze toga tela su S_1 i S_2 i ono je prikazano na slici 5.4. Primenićemo Gausovu teoremu za vektorsko polje $\mathbf{A}$, uzimajući vrednost vektorskog polja u trenutku t, tj.

$$\int_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{A}\mathrm{d}^3 r = -\int_{S_1} \mathbf{A}(t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{A}(t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{\mathrm{om}} \mathbf{A}(t)\cdot(\mathbf{u}\Delta t\times \mathrm{d}\mathbf{l}) \ . \tag{5.10.167}$$

Koristeći

$$\mathbf{A}(t+\Delta t) = \mathbf{A}(t) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Delta t \ , \tag{5.10.168}$$

jer je Δt malo, (5.10.167) postaje

$$\begin{aligned}\int_{\Delta V} \mathrm{div}\mathbf{A}\mathrm{d}^3 r &= \int_{S_2} \mathbf{A}(t+\Delta t)\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\Delta t \mathrm{d}\mathbf{S} \\ &- \int_{S_1} \mathbf{A}(t)\mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{om} \mathbf{A}(t)\cdot(\mathbf{v}\Delta t\times \mathrm{d}\mathbf{l}) \ . \end{aligned} \tag{5.10.169}$$

Iz poslednjeg izraza sledi

$$\frac{1}{\Delta t}\Big(\int_{S_2}\mathbf{A}(t+\Delta t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}-\int_{S_1}\mathbf{A}(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\Big)=\int_{S_1}(\mathrm{div}\mathbf{A})\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\int_{S_2}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{S}-\oint(\mathbf{u}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\ . \tag{5.10.170}$$

U limesu $\Delta t\to 0$ dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\mathbf{A}(t)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\int_S \mathrm{div}\mathbf{A}\,\mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}+\int_S\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\mathrm{d}\mathbf{S}-\int_S \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{A})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\ . \tag{5.10.171}$$

Iz (5.10.171) vidimo da postoje tri doprinosa promeni fluksa vektorskog polja $\mathbf{A}$ po pokretnoj konturi. Pri kretanju konture ona prolazi kroz oblast sa izvorima i ponorima polja $\mathbf{A}$. To je prvi sabirak sa desne strane u (5.10.171). Drugi sabirak je doprinos promeni fluksa zbog zavisnosti vektorskog polja od vremena, dok je treći sabirak vezan za curenje fluksa kroz omotač. Sada se vratimo na formulu (5.10.163) i pretpostavimo da se kontura integracije C kreće na zadati način. Primenom (5.10.171) imamo

$$\oint_{C(t)}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}-\oint_{C(t)}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\ , \tag{5.10.172}$$

odnosno

$$\oint_{C(t)}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{S(t)}\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}\ . \tag{5.10.173}$$

Formula (5.10.173) je Faradejev zakon za pokretnu konturu. Sve veličine u ovom zakonu meri laboratorijski posmatrač.

Pretpostavimo sada da se kontura kreće malom brzinom u poredjenju sa brzinom svetlosti, tj. da je $v\ll c$. Za posmatrača S' vezanog za konturu Faradejev zakon ima oblik

$$\oint_C\mathbf{E}'\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}'=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\int_S\mathbf{B}'\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}'\ . \tag{5.10.174}$$

Sve primovane veličine meri posmatrača iz sistema S'. Veličine koje meri laboratorijski posmatrač (sistem S) su neprimovane i za njega Faradejev zakon je oblika (5.10.173). Kako je $\mathrm{d}\mathbf{l}'=\mathrm{d}\mathbf{l}$ i $\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t$ to poredjenjem ova dva zakona dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}' &= \mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\\ \mathbf{B}' &= \mathbf{B}\ .\end{aligned}$$

Dobili smo nerelativistički zakon transformacije polja jer smo pretpostavili da se kontura kreće malom brzinom. Izraz

$$\mathcal{E}=\oint_C\mathbf{E}'\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}'$$

je elektromotorna sila. Sve veličine u definiciji elektromotorne sile se odnose na posmatrača sa konture.

Primer 1. Kontura kvadratnog oblika kreće se brzinom $\mathbf{v} = v\mathbf{e_x}$ u xy ravni u magnetnom polju $\mathbf{B} = B(x)\mathbf{e_z}$. Sopstvena dužina stranice kvadrata je l. Proveriti važenje Faradejevog zakona u sistemu konture i u laboratorijskom sistemu.

Rešenje: Neka je sistem S' vezan za kvadrat, postavljen tako da mu se koordinatni početak poklapa sa jednim temenom kvadrata, a x' i y' ose su duž njegovih stranica. U ovom sistemu postoji električno i magnetno polje:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -\frac{vB(x)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e_y} \\ \mathbf{B}' &= \frac{B(x)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\mathbf{e_z} \ . \end{aligned}$$

EMS u trenutku t' u sistemu konture je

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E}'\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}' = -\frac{vl}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big[B\Big(\frac{l+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) - B\Big(\frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big)\Big] \ .$$

Sa druge strane je

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}' &= \frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_0^l \frac{\partial}{\partial t'}B\Big(\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big)\mathrm{d}x' \\ &= \frac{lv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_{z_1}^{z_2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z \ , \end{aligned} \qquad (5.10.175)$$

gde su granice integracije

$$z_1 = \frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad z_2 = \frac{l+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ .$$

Na kraju dobijamo

$$\int \frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}' = \frac{vl}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big(B\Big(\frac{l+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big) - B\Big(\frac{vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\Big)\Big) \ . \qquad (5.10.176)$$

Dakle važi

$$\oint \mathbf{E}'\cdot \mathrm{d}\mathbf{l}' = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\int \mathbf{B}'\mathrm{d}\mathbf{S}' \qquad (5.10.177)$$

Ako je $v \ll c$ onda je

$$\mathcal{E} = vl(B(vt) - B(l+vt)) \ . \qquad (5.10.178)$$

Za posmatrača u sistemu S kontura je pokretna pa on primenjuje (5.10.173). Leva strana ove jednačine je

$$\oint (\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = vl\Big(B\Big(vt + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Big) - B(vt)\Big) \ . \qquad (5.10.179)$$

Lako se vidi da je to i desna strana. Prethodni izraz se u nerelativističkom slučaju svodi na (5.10.178).

Glava 6

Elektrostatičko polje u vakuumu

Ova glava posvećena je elektrostatičkom polju u vakuumu. Posle kratkog uvoda u prvom poglavlju, u drugom poglavlju se razmatraju skokovi potencijala i uvodi dipolni sloj. Zatim, u trećem poglavlju, se ispituje jednoznačnost Poasonove jednačine. Četvrto poglavlje posvećeno je Poason-Grinovoj formuli u elektrostatici. Naredno, peto poglavlje obradjuje tehniku nalaženja rešenja Laplasove jednačine metodom razdvajanja promenljivih. Posebno se analiziraju Dekartove, sferne i cilindrične koordinate. U narednim poglavljima se razmatra elektrostatičko polje naelektrisanih provodnika. Dat je i metod Grinovih funkcija za nalaženje rešenja Poasonove jednačine. Poslednje poglavlje posvećeno je energiji elektrostatičkog polja u vakuumu.

6.1 Uvod

Naelektrisanja koja miruju generišu statičko električno polje $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$. U tom slučaju Maksvelove jednačine za polje u vakuumu se svode na

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \frac{\rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0} && (6.1.1) \\ \mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{r}) &= 0\ . && (6.1.2) \end{aligned}$$

Iz (6.1.2) sledi da je $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, gde je ϕ skalarni potencijal. Zamenom ovog izraza u (6.1.1) dobijamo Poasonovu jednačinu

$$\triangle\phi = -\frac{\rho(\mathbf{r})}{\varepsilon_0}\ . \tag{6.1.3}$$

U oblasti prostora gde je zapreminska gusina naelektrisanja nula, $\rho = 0$ potencijal zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\triangle\phi = 0\ . \tag{6.1.4}$$

Rešenja Laplasove jednačine su harmonijske funkcije. Pri rešavanju elektrostatičkih problema često se rešenja traže u pojedinačnim oblastima prostora, a zatim se dobijena rešenja 'zašivaju' primenom graničnih uslova. Ako su na graničoj površini izmedju dve sredine prisutna površinska naelektrisanja, normalna komponenta električnog polja će trpeti skok, prema

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\ . \tag{6.1.5}$$

Tangencijalna komponenta električnog polja je neprekidna, tj.

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \ . \tag{6.1.6}$$

Indeksi 1 i 2 se odnose na prvu, odnosno drugu oblast. Jedinični vektor, $\mathbf{n}$ je usmeren od sredine 1 ka sredini 2. Iz (6.1.5) sledi

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_1 - \frac{\partial \phi}{\partial n}\Big|_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \ , \tag{6.1.7}$$

gde je

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla \phi$$

izvod potencijala u pravcu normale. Izraz (6.1.7) govori o skoku izvoda potencijala u pravcu normalnom na graničnu površ izmedju dve oblasti.

6.2 Dipolni sloj

U većini primera potencijal električnog polja je neprekidna funkcija. Izuzetak čini tzv. dipolni sloj koje ćemo analizirati u ovom poglavlju. Neka se dve naelektrisane površine nalaze na malom medjusobnom rastojanju $b(\mathbf{r})$. Gustina naelektrisanja u naspramnim tačkama na ove dve površine je $+\sigma(\mathbf{r})$ odnosno $-\sigma(\mathbf{r})$. Površinska gustina σ i rastojanje izmedju ove dve površine ne moraju biti konstantni. Kada je rastojanje izmedju ove dve naelektrisane površine, b malo dobijamo tzv. dipolni sloj (list). Dipolni sloj je skup tačkastih dipola koji su konfinirani na površini. On se sastoji od elementarnih dipola momenta

$$\mathrm{d}\mathbf{p} = b(\mathbf{r})\sigma(\mathbf{r})\mathrm{d}S\mathbf{n} \ , \tag{6.2.8}$$

gde je ort normale $\mathbf{n}$ usmeren od negativne ka pozitivnoj površini. Veličina

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}S} = \sigma(\mathbf{r})b(\mathbf{r})\mathbf{n} \tag{6.2.9}$$

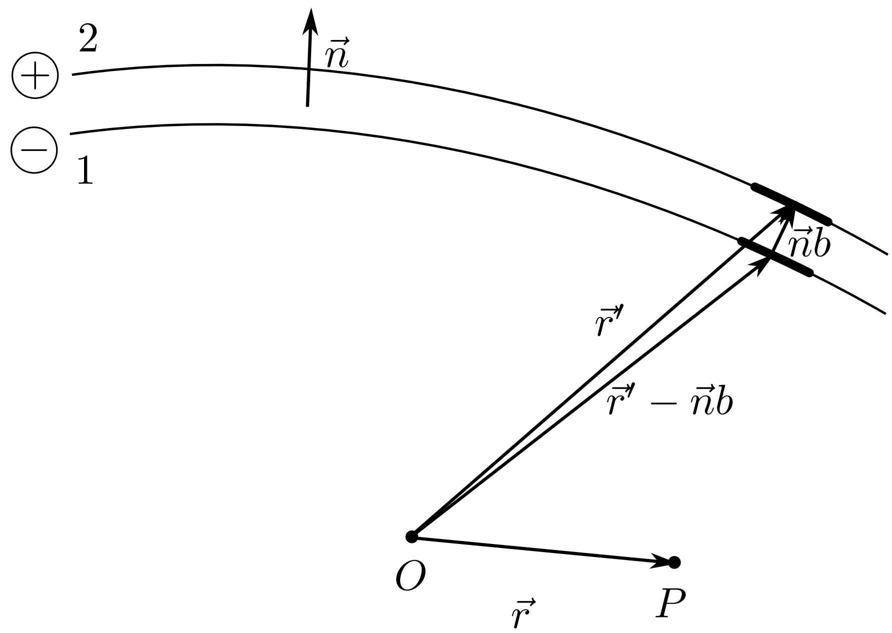
naziva se gustinom električnog dipolnog momenta. Granična površ izmedju tečnosti i gasa, na kojoj su zarobljeni polarni molekuli gasa je primer dipolnog sloja.

Odredimo sada potencijal dipolnog sloja u proizvoljnoj tački $\mathbf{r}$. Potencijal je zbir potencijala naelektrisanja sa pozitivne i sa negativne površine kao što je prikazano na slici 6.1, tj.

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int \frac{\sigma(\mathbf{r}'')\mathrm{d}S''}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|} \Big) \ . \tag{6.2.10}$$

Kako je $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - b\mathbf{n}$, i kako je b malo u poredjenju sa $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, to je potencijal u tački P dat sa

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(1 - \frac{b\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} + \dots\Big)\Big) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\sigma(\mathbf{r}')b\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \ ,
\end{aligned} \tag{6.2.11}$$



Slika 6.1: Potencijal dipolnog sloja u tački P.

gde smo članove višeg reda po malom parametru b/r zanemarili. Prostorni ugao (slika 6.2) pod kojim se iz tačke u kojoj odredjujemo potencijal vidi element površine $\mathrm{d}S'$ je

$$\mathrm{d}\Omega' = \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} \ . \qquad (6.2.12)$$

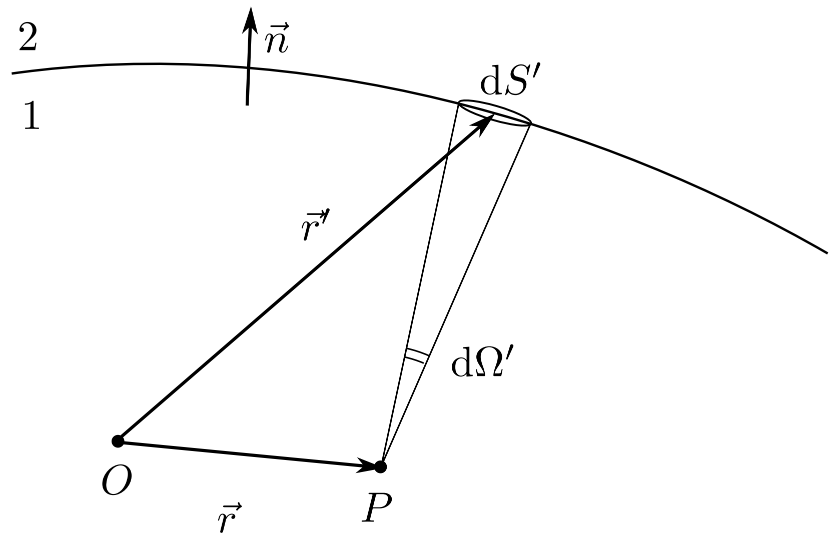
Znak prostornog ugla zavisi od znaka kosinusa ugla izmedju vektora $\mathbf{n}$ i $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Na slici 6.3 ugao izmedju vektora $\mathbf{n}$ i $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ je oštar, pa je prostorni ugao pozitivan. Sa druge strane na slici 6.4, taj ugao je tup, pa je prostorni ugao negativan. Izraz za potencijal dipolnog sloja je

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \tau(\mathbf{r}')\mathrm{d}\Omega' \ . \qquad (6.2.13)$$

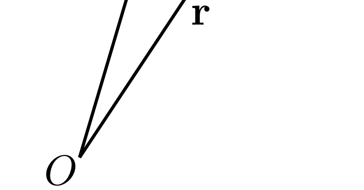
Odredimo sada razliku potencijala u tačkama 1 i 2 koje se nalaze uz sam dipolni list u oblastima 1 odnosno 2. Dipolni sloj možemo da predstavimo kao superpoziciju malog diska infinitezimalno male površine $\mathrm{d}S$ neposredno iznad tačke 1 i ispod tačke 2 i ostatka dipolnog sloja, dobijen izdvajanjem malog diska površine $\mathrm{d}S$. Za mali element dipolnog sloja gustinu električnog dipolnog momeneta možemo da smatramo skoro konstantnom, pa iz (6.2.13) sledi da je potencijal u tački 1 jednak $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\tau$, dok je u tački 2 njegova vrednost $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}2\pi\tau$. Za dipolni sloj iz kojeg smo izvadili mali disk potencijal je isti u tačkama 1 i 2, pa je ukupni skok potencijala po principu superpozicije dat sa

$$\phi_2(\mathbf{r}) - \phi_1(\mathbf{r}) = \frac{\tau(\mathbf{r})}{\epsilon_0} \ . \qquad (6.2.14)$$

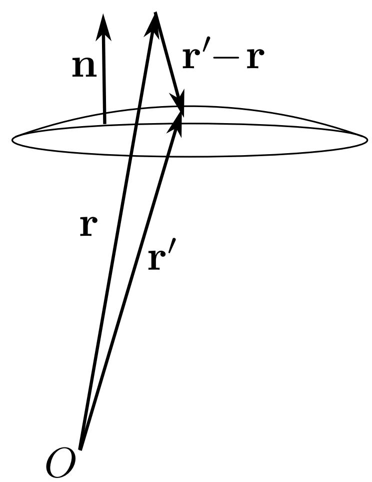
Dakle, potencijal električnog polja trpi skok kod dipolnog sloja, proporcionalan gustini dipolnog momenta sloja.



Slika 6.2: Prostorni ugao u tački P pod kojim se vidi element dS'.



Slika 6.3: Tačka posmatranja je ispod površine, pa je prostorni ugao pozitivan.



Slika 6.4: Tačka posmatranja je iznad površine, pa je prostorni ugao negativan.

6.3 Jednoznačnost rešenja Poasonove jednačine

U ovom poglavlju odredićemo pod kojim uslovima Poasonova, odnosno Laplasova jednačina imaju jednoznačno rešenje u povezanoj oblasti prostora V. Rešenje Poasonove jednačine je jednoznačno ako:
1. u oblasti V znamo raspodelu naelektrisanja $\rho = \rho(\mathbf{r})$ i sve diskontinuitete potencijala i izvoda potencijala;
2. na graničnoj površini S oblasti V ili je zadat potencijal $\phi|_S = H(\mathbf{r})$ ili znamo izvod potencijala u pravcu normale

$$\mathbf{n} \cdot \nabla\phi|_S \equiv \frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_S = F(\mathbf{r}) \ .$$

Ukoliko na granici oblasti V znamo potencijal takav granični uslov se naziva Dirišleovim. Ako je na granici zadata vrednost izvoda potencijala u pravcu normala takav granični uslov je Nojmanov.

Da bismo dokazali prethodno tvrdjenje prvo ćemo izvesti prvi Green-ov identitet. Zamenom $\mathbf{A} = \chi\nabla\psi$, gde su χ i ψ dve diferencijabilne funkcije u Gausovu teoremu

$$\int_V \mathrm{div}\mathbf{A}\mathrm{d}^3 r = \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}S \tag{6.3.15}$$

dobijamo spomenuti identitet

$$\int_V \mathrm{d}^3 r(\nabla\chi \cdot \nabla\psi + \chi\triangle\psi) = \oint_{\partial V} \chi\nabla\psi \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{6.3.16}$$

Sada ćemo pokazati jednoznačnost rešenja Poasonove jednačine. Pretpostavimo da postoje dva rešenja ϕ_1 i ϕ_2 Poasonove jednačine koja zadovoljavaju iste granične uslove. Njihova razlika $u = \phi_1 - \phi_2$ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\triangle u = 0$. Ukoliko potencijal zadovoljava Dirišleov granični uslov onda je $u|_{\partial V} = 0$. Ako sa druge strane potencijal zadovoljava Nojmanov granični uslov tada je

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \ .$$

Zamenom $\psi = \chi = u$ u prvi Grinov identitet dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \Big[(\nabla u)^2 + u\triangle u\Big] = \oint_{\partial V} u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S \ . \tag{6.3.17}$$

Drugi sabirak sa leve strane u (6.3.17) je nula. Površinski član u izrazu (6.3.17) je takodje jednak nuli bilo da su zadati Dirišleovi bilo Nojmanovi granični uslovi. Prema tome dobili smo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r(\nabla u)^2 = 0 \ , \tag{6.3.18}$$

odakle sledi da je $u = C$, tj. rešenja ϕ_1 i ϕ_2 se razlikuju do na konstantu, što je fizički jedno te isto rešenje. Recimo na kraju da granični uslov može biti i mešovit, tj. na nekom delu granice je zadat potencijal, a na preostalom izvod potencijala u pravcu normale na granici. U ovom slučaju površinski član u (6.3.17) je takodje jednak nuli.

6.4 Poason–Grinova formula

Ako u prvom Grinovom identitetu (6.3.16) zamenimo funkcije ψ i χ dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r(\nabla\psi\cdot\nabla\chi + \psi\triangle\chi) = \oint_{\partial V} \psi\nabla\chi\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{6.4.19}$$

Oduzimanjem dobijenog izraza od (6.3.16) dobijamo drugi Grinov identitet:

$$\int_V \mathrm{d}^3 r(\chi\triangle\psi - \psi\triangle\chi) = \oint_{\partial V} (\chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{6.4.20}$$

Zamenom $\psi = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$ i $\chi = \phi$ u drugi Grinov identitet (A.0.14), u kome se integrali po $\mathbf{r}'$ dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r'\Big(\phi(\mathbf{r}')\triangle'\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\triangle'\phi(\mathbf{r}')\Big) = \oint_{\partial V}\Big(\phi\nabla'\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big) - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\phi\Big)\mathrm{d}\mathbf{S}' \ . \tag{6.4.21}$$

Primenom Dirak-Grinovog identiteta dobijamo

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\Big[\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\phi - \phi\nabla'\Big(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big)\Big]\mathrm{d}\mathbf{S}' \ . \tag{6.4.22}$$

Izraz (6.4.22) je Poason-Grinova formula. Prvi član sa desne strana jednačine (6.4.22) je zapreminski integral, gde se integrali po naelektrisanjima koja se nalaze u oblasti V. Drugi član sa desne strane ove jednačine je površinski. Podintegralna funkcija u ovom integralu zavisi od potencijala i izvoda potencijala u pravcu normale na granici.

Neka je $V = R^3$, tj. zapremina V je ceo prostor. Potencijal na velikim rastojanjima od sistema teži nuli kao $\frac{1}{r'}$ ili brže, pa izraz u zagradi površinskog integrala u (6.4.22) se ponaša kao $\frac{1}{r'^3}$ na velikim rastojanjima. Množenjem sa elementom površine koji se ponaša kao r'^2 vidimo da je površinski integral tipa $\frac{1}{r'}$ i dakle teži nuli. U ovom slučaju Poason–Grinova formula se svodi na poznat rezultat

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{R^3}\frac{\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ , \tag{6.4.23}$$

gde se integrali po celom prostoru. Površinski integral u Poason-Grinovoj formuli je doprinos potencijalu od naelektrisanja van oblasti V. Napomenimo da Poason-Grinova formula predstavlja integralni uslov koji zadovoljava potencijal.

Primer 1. Primenom Poason–Grinoive formule pokazati da je potencijal u tački P elektrostatičkog polja jednak srednjoj vrednosti potencijala na sferi sa centrom u tački P, pod uslovom da se u zapremini sfere ne nalaze naelektrisanja. Ovaj iskaz je poznat pod nazivom teorema o srednjoj vrednosti.

Rešenje: Uzećemo da je tačka P koordinatni početak. Primenom Poason–Grinove formule (6.4.22) vrednost potencijala u tački P je

$$\begin{aligned}\phi(0) &= \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\Big(\frac{1}{R}\nabla'\phi(\mathbf{r}')+\phi(\mathbf{r}')\frac{\mathbf{r}'}{R^3}\Big)\mathrm{d}\mathbf{S}' \\ &= -\frac{1}{4\pi R}\oint_{\partial V}\mathbf{E}(\mathbf{r}')\mathrm{d}\mathbf{S}'+\frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\partial V}\phi(\mathbf{r}')\mathrm{d}S' \ .\end{aligned} \tag{6.4.24}$$

Prvi član, primenom Gausove teoreme je jednak nuli, pa je

$$\phi(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\oint_{\partial V}\phi(\mathbf{r}')\mathrm{d}S' \ , \tag{6.4.25}$$

čime smo pokazali teoremu.

6.5 Rešavanje Laplasove jednačine metodom razdvajanja promenljivih

Laplasova jednačina $\triangle\phi = 0$ je parcijalna diferencijalna jednačina drugog reda. U naredna tri podpoglavlja rešavaćemo Laplasovu jednačinu u Dekartovim, sfernim i cilindričnim koordinatama metodom razdvajanja promenljivih.

6.5.1 Rešavanje Laplasove jednačine u Dekartovim koordinatama

Laplasova jednačina u Dekartovim koordinatama je

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \ . \tag{6.5.26}$$

Pretpostavićemo da partikularno rešenje ove jednačine je proizvod tri funkcije od kojih svaka zavisi od jedne Dekartove koordinate: $\phi = X(x)Y(y)Z(z)$. Laplasova jednačina postaje

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0 \ . \tag{6.5.27}$$

Zbir tri funkcije od kojih prva zavisi samo od x, druga od y a treća od z, za svako x, y, z je nula. To je jedino moguće ako je svaka od ovih funkcija konstantna, tj.

$$\frac{1}{X}\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2} = -k_x^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k_y^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = k_z^2 \tag{6.5.28}$$

pri čemu je $k_x^2 + k_y^2 - k_z^2 = 0$. Znak konstanti k_x^2, k_y^2 i k_z^2 zavisi od graničnih uslova. Dalje ćemo da rešavamo konkretan problem. Nadjimo rešenje Laplasove jednačine unutar kvadra ivica a, b i c. Neka se koordinatni početak nalazi u jednom temenu kvadra, a ose x, y i z su redom duž stranica dužine a, b odnosno c. Unutar kvadra nema naelektrisanja. Strane $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = b$ i $z = 0$ su na nultom potencijalu, dok je strana $z = c$ na konstantnom potencijalu V_0. Zbog graničnih uslova je $k_x^2 > 0$, pa je rešenje za funkciju X dato sa

$$X(x) = C_1 \sin(k_x x) + C_2 \cos(k_x x) \ . \tag{6.5.29}$$

Iz $\phi(x = 0, y, z) = X(0)Y(y)Z(z) = 0$ i $\phi(x = a, y, z) = X(a)Y(y)Z(z) = 0$ sledi $X(0) = X(a) = 0$ pa se konačno dobija $C_2 = 0$, $k_x = n\pi/a$, gde je n ceo broj. Granični uslov je diskretizovao konstantu k_x. Prema tome partikularna rešenja za funkciju X su

$$X_n \sim \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \ . \tag{6.5.30}$$

Analogno partikularna rešenja za funkciju Y su

$$Y_m \sim \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \ , \tag{6.5.31}$$

gde $m \in Z$.

Jednačina za funkciju Z je

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} - \pi\Big(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\Big)Z = 0 \ . \tag{6.5.32}$$

Njeno rešenje je

$$Z = Ae^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}z} + Be^{-\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}}z} \ . \tag{6.5.33}$$

Granični uslov $Z(z = 0) = 0$ daje $A = -B$, pa zaključujemo da je za fiksne koeficijente n i m funkcija Z data sa

$$Z_{nm} \sim \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi z\right) \ . \tag{6.5.34}$$

Opšte rešenje Laplasove jednačine je zbir partikularnih rešenja:

$$\phi = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi z\right) \ , \tag{6.5.35}$$

gde su A_{mn} koeficijenti koje odredjujemo iz graničnog uslova

$$V_0 = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}\pi c\right) . \tag{6.5.36}$$

Množenjem gornje relacije sa $\sin(k\pi x/a)\sin(l\pi y/b)$ i integracijom po x i y uz relacije ortogonalnosti

$$\int_0^a \mathrm{d}x \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{l\pi x}{a}\right) = \frac{a}{2}\delta_{nl} , \tag{6.5.37}$$

dobijamo

$$\phi = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{16V_0}{\pi^2(2n+1)(2m+1)} \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{(2m+1)\pi y}{b}\right)}{\sinh\left(\pi c\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}}\right)} \sinh\left(\pi z\sqrt{\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}}\right) . \tag{6.5.38}$$

Rezultat za potencijal je predstavljen u obliku dvostruke beskonačne sume.

6.5.2 Rešavanje Laplasove jednačine u sfernim koordinatama

Laplasova jednačina $\triangle\phi = 0$, gde je potencijal $\phi = \phi(r, \theta, \varphi)$ funkcija sfernih koordinata, je

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{6.5.39}$$

Rešenje parcijalne diferencijalne jednačine (6.5.39) pretpostavićemo u obliku

$$\phi = \frac{R(r)}{r}P(\theta)Q(\varphi) ,$$

tj. kao proizvod tri funkcije od kojih prva zavisi od r, naredna od θ i treća od φ. Zamenom ovog oblika rešenja u jednačinu (6.5.39) dobijamo

$$PQ\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{RQ}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{RP}{r^2\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0 . \tag{6.5.40}$$

Množenjem prethodne jednačine sa $r^2\sin^2\theta/(PQR)$ dobijamo

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = 0 . \tag{6.5.41}$$

U prethodnoj jednačini prvi sabirak je funkcija θ i r, a drugi samo od φ, a kako im je zbir nula za svako r, θ, φ onda oni moraju biti konstante. Prvi je m^2, a drugi $-m^2$, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2Q = 0 , \tag{6.5.42}$$

odnosno

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r^2\sin\theta P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\Big)-\frac{m^2}{r^2\sin^2\theta}=0\ . \tag{6.5.43}$$

Iz (6.5.42) sledi $Q\sim e^{im\varphi}$. Konstanta m mora biti ceo broj da bi funkcija Q bila periodična sa periodom 2π, tj.

$$Q(\varphi+2\pi)=Q(\varphi)\ .$$

Jednačinu (6.5.43) prepisaćemo u obliku

$$\frac{r^2}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{\sin\theta P}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\Big)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}=0\ , \tag{6.5.44}$$

gde smo sada razdvojili promenljive; prvi sabirak je funkcija od r a drugi od θ. Kako im je zbir nula to oni moraju biti konstante. Prvi sabirak je $l(l+1)$ a drugi $-l(l+1)$. Dakle dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}R=0\ , \tag{6.5.45}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Big(\sin\theta\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\theta}\Big)+\Big[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Big]P=0\ . \tag{6.5.46}$$

Jednačina (6.5.45) je Ojlerova diferencijalna jednačina i njeno rešenje tražićemo u obliku $R\sim r^k$. Zamenom u jednačinu dobijamo

$$k(k-1)-l(l+1)=0\ ,$$

odakle je $k=l+1,-l$. Dakle, rešenje jednačine (6.5.45) je

$$R=Ar^{l+1}+B\frac{1}{r^l}\ , \tag{6.5.47}$$

gde su A i B konstante. Smenom $x=\cos\theta$, $(-1\le x\le 1)$ jednačina (6.5.46) postaje

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\Big]+\Big[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\Big]P=0\ . \tag{6.5.48}$$

Ovo je tzv. *generealisana Ležandrava diferencijalna jednačina.*

Razmotrićemo prvo specijalan slučaj kada je $m=0$, tj. $Q=1$. Ovo znači da potencijal ne zavisi od azimutalnog ugla φ. To je kod sistema koji su invarijantni na rotacije oko $z-$ose, tj. koji poseduju azimutalnu simetriju. Jednačina (6.5.48) postaje

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2P_l}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}P_l}{\mathrm{d}x}+l(l+1)P_l=0\ , \tag{6.5.49}$$

što je *Ležandrova jednačina.* Rešenja jednačine (6.5.49) su Ležandrovi polinomi $P_l(x)$ dati sa

$$P_l(x)=\frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l\ , \tag{6.5.50}$$

što je tzv. Rodrigova formula[1]. Da bi Ležandrova diferencijalna jednačina imala konačna rešenja konstanta l mora biti $l = 0, 1, 2 \ldots$.

Primer 1. Pokažite da (6.5.50) zadovoljava diferencijalnu jednačinu (6.5.49).

Prvih nekoliko Ležandrovih polinima su

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \ , \\ P_1(x) &= x \ , \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \ . \end{aligned} \tag{6.5.51}$$

Ležandrovi polinomi su *ortogonalni* na intervalu $-1 \leq x \leq 1$ pa proizvoljnu funkciju definisanu na ovom intervalu možemo razviti po njima. Relacije ortogonalnosti su

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) \mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm} \ . \tag{6.5.52}$$

Primer 2. Pokažite relacije ortogonalnosti. Pomnožite (6.5.49) sa $P_n(x)$ i integralite po x na intervalu $[-1, 1]$. Za pomoć konsultujte [1].

Zaključak je da je opšte rešenje Laplasove jednačine u slučaju azimutalne simetrije ima oblik

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \ . \tag{6.5.53}$$

Konstante A_l i B_l odredjuju se iz graničnih uslova. Osobine Ležandrovih polinoma su sumirane u Dodatku C.

Razvijanjem funkcije $f(t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ u stepeni red po promenljivoj t dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x), \tag{6.5.54}$$

za $|x| \leq 1, 0 < t < 1$. Stoga je funkcija $(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ generatrisa Ležandrovih polinoma. Izraz

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2}} \ , \tag{6.5.55}$$

---

[1]Jednačina (6.5.49) se može rešiti predpostavljajući rešenje u obliku reda

$$P_l(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

gde je s konstanta.

gde je γ ugao izmedju vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, je funkcija od $\cos\gamma$ i možemo je razviti u red po Ležandrovim polinomima. Rezultat je

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\gamma)\ , \tag{6.5.56}$$

gde su $r_<$ i $r_>$ su manja odnosno veća od promenljivih r i r'. Ova formula se lako pokazuje. Uzmimo da je $\mathbf{r}'=r'\mathbf{e}_3$, tada je ugao γ sferni ugao θ. Dalje je

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}}\ . \tag{6.5.57}$$

Gornji izraz je funkcija ugla θ i možemo ga razviti u red po Ležandrovim polinomima

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}C_lP_l(\cos\theta)\ , \tag{6.5.58}$$

gde su C_l koeficijenti. Ove koeficijente odredjujemo uzimanjem $\theta=0$. Iz razvoja

$$\frac{1}{|r-r'|}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \tag{6.5.59}$$

i $P_l(1)=1$ sledi

$$\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}P_l(\cos\theta)\ . \tag{6.5.60}$$

Vratimo se sada opštem slučaju, tj. situaciji kada je m proizvoljno. Da bi jednačina (6.5.48) imala konačna rešenja potrebno je i dovoljno da $l=0,1,2,3,\dots$ i $m=-l,-l+1,\dots,l-1,l$. Rešenja su tzv. asocirani Ležandrovi polinomi dati sa

$$P_l^m(x)=(-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m}P_l(x)\ . \tag{6.5.61}$$

Ova formula važi i za negativne vrednosti m. Može se pokazati da je

$$P_l^{-m}(x)=(-1)^m\frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)\ . \tag{6.5.62}$$

Sferni harmonici su

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi}\ . \tag{6.5.63}$$

Oni čine skup ortonormiranih funkcija na intervalu $0\le\varphi\le2\pi,\ 0\le\theta\le\pi$

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta Y_{lm}^{\star}(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\ . \tag{6.5.64}$$

Sferni harmonici zadovoljavaju sledeće relacije kompletnosti

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y^{\star}_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \ . \tag{6.5.65}$$

Prvih nekoliko sfernih harmonika su

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \ . \end{aligned} \tag{6.5.66}$$

Osobine sfernih harmonika su sumirane u dodatku C. Dakle, opšte rešenje Laplasove jednačine je

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m}\Big(A_{lm}r^l + \frac{B_{lm}}{r^{l+1}}\Big)Y_{lm}(\theta,\varphi) \ , \tag{6.5.67}$$

gde se konstante A_{lm} i B_{lm} odredjuju iz graničnih uslova.

Primer 3. Dielektrična kugla poluprečnika R napravljena je od materijala sa stalnom polarizacijom $\mathbf{P}$. Naći električno polje u svakoj tački prostora.

Rešenje: Uzećemo da je polarizacija usmerena duž $z-$ose, tj. $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_3$ kao na slici 6.5. Unutar kugle potencijal je

$$\phi_1 = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) \ , \tag{6.5.68}$$

a van kugle

$$\phi_2 = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \ . \tag{6.5.69}$$

Neprekidnost potencijala

$$\phi_1(r=R) = \phi_2(R) \tag{6.5.70}$$

daje $B_l = A_l R^{2l+1}$. Iz $P_{2n} - P_{1n} = P\cos\theta$ i $D_{2n} - D_{1n} = 0$ sledi

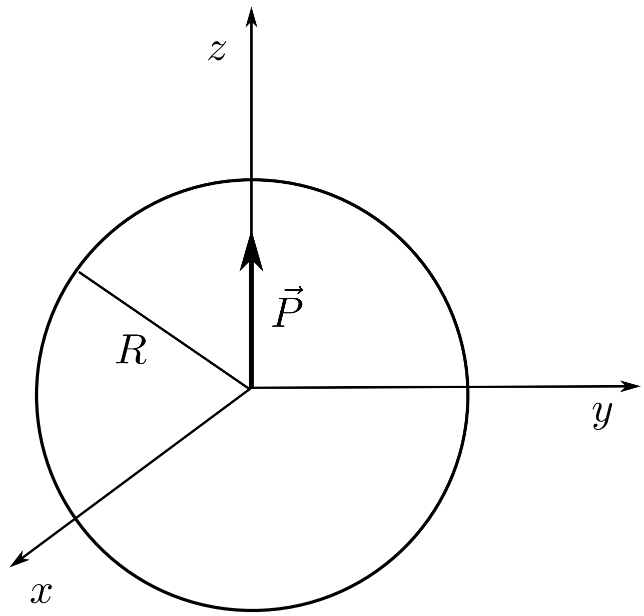
$$-\epsilon_0\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\Big|_{r=R} + \epsilon_0\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\Big|_{r=R} = P\cos\theta \ . \tag{6.5.71}$$

Iz gornjih jednačina uz $\cos\theta = P_1(\cos\theta)$ dobijamo

$$\phi = \begin{cases} \frac{P}{3\epsilon_0} r\cos\theta & \text{za } r<R \\ \frac{P}{3\epsilon_0}\frac{R^3}{r^2}\cos\theta & \text{za } r>R \end{cases} \ . \tag{6.5.72}$$

Električno polje se lako dobija

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} & \text{za } r<R \\ \frac{PR^3}{3\epsilon_0 r^3}(2\cos\theta\mathbf{e}_r + \sin\theta\mathbf{e}_\theta) & \text{za } r>R \end{cases} \ . \tag{6.5.73}$$



Slika 6.5: Polarizovana kugla radijusa R i stalne polarizacije $\mathbf{P}$.

6.5.3 Rešavanje Laplasove jednačine u cilindričnim koordinatama

Laplasovu jednačinu u cilindričnim koordinatama

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{6.5.74}$$

rešićemo metodom razdvajanja promenljivih. Njeno partikularno rešenje ćemo pretpostaviti u obliku proizvoda tri funkcije $\phi = R(\rho)Q(\phi)Z(z)$. Zamenom u Laplasovu jednačinu dobijamo

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\frac{1}{\rho^2 Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}=0\ . \tag{6.5.75}$$

Poslednji član u prethodnoj formuli je funkcija promenljive z, a prva dva su funkcije druge dve promenljive, ρ i ϕ. Dakle, mora važiti

$$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}-k^2Z=0 \tag{6.5.76}$$

$$\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{\rho}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+k^2\rho^2+\frac{1}{Q}\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}=0\quad , \tag{6.5.77}$$

gde je k konstanta. Jednačina (6.5.77) razdvaja promenljive pa dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}\phi^2}+\nu^2Q=0 \tag{6.5.78}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+\left(k^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R=0\ . \tag{6.5.79}$$

Rešenja jednačine (6.5.76), za fiksno k, su $Z_k \sim e^{\pm kz}$. Već smo ranije rekli da konstanta ν mora biti ceo broj da bi potencijal bio periodičan sa periodom 2π po azimutalnom uglu. Rešenja za funkciju $Q(\phi)$ su $Q_\nu = A\cos(\nu\phi) + B\sin(\nu\phi)$, gde su A i B konstante. Konstanta k je realna i pozitivna, pa ćemo u jednačini (6.5.79) napraviti smenu $x = k\rho$. Diferencijalna jednačina (6.5.79) postaje

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)R = 0 \quad . \tag{6.5.80}$$

Jednačina (6.5.80) je Beselova diferencijalna jednačina. U zavisnosti od vrednosti parametra ν razlikujemo sledeće slučajeve:
1. Parametar ν nije ceo broj. Partikularna rešenja u ovom slučaju su Beselove funkcije reda $\pm\nu$. Ona su data sa

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{6.5.81}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(j-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} . \tag{6.5.82}$$

Dakle, kada ν nije ceo broj, rešenje jednačine (6.5.80) je

$$R(x) = AJ_\nu(x) + BJ_{-\nu}(x) \ ,$$

gde su A i B konstante.
2.Parametar ν jeste ceo broj, tj. $\nu = n$. U ovom slučaju važi $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, tj. Beselove funkcije J_n i J_{-n} su linearno zavisne. Dakle, kada $\nu \in Z$ treba, pored rešenja J_n, naći drugo linearno nezavisno rešenje jednačine (6.5.80).

Nojmanova funkcija $N_\nu(x)$ (ili Beselova funkcija druge vrste) definisana sa

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi} \tag{6.5.83}$$

takodje je rešenje jednačine (6.5.80). Ako ν nije ceo broj onda su J_ν i N_ν linearno nezavisna rešenja jednačine (6.5.80). U limesu $\nu \to m \in Z$ Beselove funkcije prve i druge vrste su i dalje linearno nezavisne.

Beselove funkcije treće vrste ili Hankelove funkcije definisane su kao:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \tag{6.5.84}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x). \tag{6.5.85}$$

One su takodje linearno nezavisna rešenja Beselove diferencijalne jednačine (6.5.80).

Beselove funkcije zadovoljavaju rekurentne veze, koje smo dali u Dodatku D. Kada je argument funkcije $x \ll 1$ vodeći članovi u razvoju Beselovih funkcija su:

$$J_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu , \tag{6.5.86}$$

$$N_\nu(x) \to \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + 0,5772 + \dots\right), & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu \neq 0. \end{cases} \tag{6.5.87}$$

Sa druge strane za veliku vrednost argumenta $x \gg 1$ imamo:

$$J_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{6.5.88}$$

$$N_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \tag{6.5.89}$$

Već iz (6.5.88-6.5.89) je jasno da Beselove funkcije imaju beskonačno puno nula. Nule Beselove funkcije ν-tog reda obeležićemo sa $x_{\nu n}$, $n = 1, 2 \dots$. Beselove funkcije $J_\nu(\frac{x_{\nu n}\rho}{a})$, za fiksno ν, čine ortogonalan skup funkcija na intervalu $0 \leq \rho \leq a$,

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu\left(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}\right) J_\nu\left(\frac{x_{\nu n'}\rho}{a}\right) = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2\delta_{nn'} \ . \tag{6.5.90}$$

Proizvoljnu funkciju $f(\rho)$ $(0 \leq \rho \leq a)$ možemo razviti u Furije-Beselov red:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \ , \tag{6.5.91}$$

gde je

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})}\int_0^a d\rho\rho f(\rho) J_\nu\left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \ . \tag{6.5.92}$$

Funkciju $f(\rho)$, neprekidnu na intervalu $0 < \rho < \infty$ možemo razložiti u Furije-Beselov integral

$$f(\rho) = \int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \tag{6.5.93}$$

gde je ν proizvoljan ceo broj. Koeficijente c_λ odredjujemo koristeći relacije ortogonalnosti

$$\int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho) J_\nu(\lambda'\rho)\rho d\rho = \frac{1}{\lambda}\delta(\lambda' - \lambda). \tag{6.5.94}$$

Diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0, \tag{6.5.95}$$

naziva se modifikovanom Beselovom jednačinom. Njena rešenja su modifikovane Beselove funkcije $I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix)$ i $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}i^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(ix)$. One su linearno nezavisna rešenja jednačine (6.5.95).

Rešimo jedan konkretan problem. Odredimo potencijal u unutrašnjosti cilindra radijusa a i visine L ako su donja osnova cilindra i njegov omotač na nultom potencijalu, a gornja osnova je na konstantnom potencijalu V. U unutrašnjosti cilindra nema naelektrisanja. Postavimo koordinatni sistem tako da mu je početak u centru donje osnove, a z osa je duž ose simetrije cilindra usmerena ka gornjoj osnovi.

Rešenja za funkcije $Q(\phi)$, $Z(z)$ i $R(\rho)$ su

$$\begin{aligned} Q(\phi) &= A\cos(m\phi) + B\sin(m\phi) \\ Z(z) &= C_1 e^{-kz} + C_2 e^{kz} \\ R(\rho) &= CJ_m(k\rho) + DN_m(k\rho) \ . \end{aligned} \tag{6.5.96}$$

Nojmanova funkcija $N_m(k\rho)$ divergira za $\rho = 0$, pa moramo uzeti $D = 0$. Potencijal donje osnove cilindra, $z = 0, 0 < \rho < a$ je nula, što daje uslov $Z(0) = 0$, odakle je $C_2 = -C_1$, pa je $Z \sim \sinh(kz)$. Za $\rho = a$ potencilal je nula što daje $J_0(ka) = 0$, odakle je $ka = x_{mn},\ n = 1, 2, \ldots$. Prema tome opšte rešenje je superpozicija partikularnih rešenja

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A_{mn}\sin(m\phi) + B_{mn}\cos(m\phi))\sinh(kz)J_m\Big(\frac{x_{mn}\rho}{a}\Big) \ , \tag{6.5.97}$$

gde su A_{mn} i B_{mn} konstante. Iz graničnog uslova $\phi(\rho, \phi, z = L) = V$ sledi

$$V = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(A'_{mn}\sin(m\phi) + B'_{mn}\cos(m\phi))J_m\Big(\frac{x_{mn}\rho}{a}\Big) \ , \tag{6.5.98}$$

gde smo uveli nove konstante $A'_{mn} = A_{mn}\sinh(kL)$, $B'_{mn} = B_{mn}\sinh(kL)$. Primenom relacija ortogonalnosti

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin(m\phi)\sin(n\phi) &= \pi\delta_{mn} \ , \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \cos(m\phi)\cos(n\phi) &= \pi\delta_{mn} \ , \\ \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin(m\phi)\cos(n\phi) &= 0 \ , \end{aligned} \tag{6.5.99}$$

dobijamo da je $A_{mn} = B_{mn} = 0$ za $m \neq 0$. Prema tome potencijal je

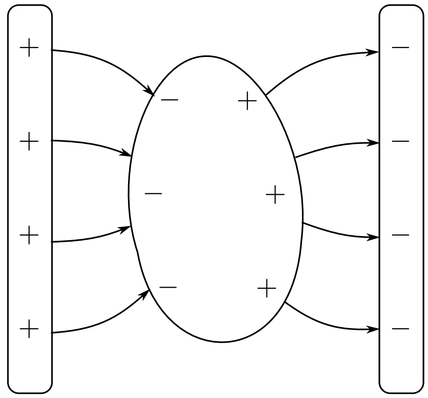
$$\phi = \pi\sum_{n=1}^{\infty} B_{0n}\sinh(\frac{x_{0n}z}{a})J_0\Big(\frac{x_{0n}\rho}{a}\Big) \ . \tag{6.5.100}$$

Potencijal ne zavisi od azimutalnog ugla φ, što smo i na samom početku mogli da pretpostavimo. Množenjem (6.5.100) sa $J_0(x_{ol}\rho/a)\rho\mathrm{d}\rho$ i integracijom po ρ od 0 do a dobijamo

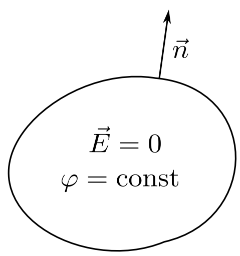
$$B_{0n} = \frac{4V}{x_{0n}J_1(x_{0n})\sinh(\frac{x_{0n}L}{a})} \ . \tag{6.5.101}$$

Konačno rešenje za potencijal je dato sa

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4V}{x_{0n}J_1(x_{0n})}\frac{\sinh(\frac{x_{0n}z}{a})}{\sinh(\frac{x_{0n}L}{a})}J_0\Big(\frac{x_{0n}\rho}{a}\Big) \ . \tag{6.5.102}$$



Slika 6.6: Provodnik izmedju ploča naelektrisanog kondenzatora.



Slika 6.7: Polje u provodniku je nula, a njegova površina je ekvipotecijalna.

6.6 Elektrostatičko polje provodnika

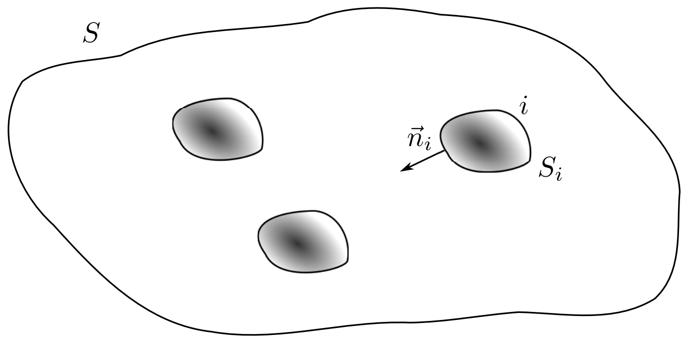
Kada se provodnik unese u elektrostatičko polje onda tanak sloj slobodnih elektrona na površini provodnika generiše polje koje unutar provodnika u potpunosti poništava spoljašnje polje. Ukupno polje unutar provodnika jednako je nuli. Na slici 6.6 prikazali smo linije elektrostatičkog polja provodnika koji se nalazi u pločastom kondenzatoru. Iz graničnih uslova sledi da elekrično polje na površini provodnika ima samo normalnu komponentu

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n} \ , \tag{6.6.103}$$

gde je $\mathbf{n}$ ort normale, a σ gustina površinskog naelektrisanja na površini provodnika (slika 6.7). Površina provodnika je ekvipotencijalna površina; potencijal provodnika je ϕ. Ako u prostoru izmedju provodnika nema naelektrisanja onda elektrostatičko polje zadovoljava jednačine $\text{div}\mathbf{E} = 0, \ \text{rot}\mathbf{E} = 0$, odakle sledi da potencijal zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \ .$$

Iz Laplasove jednačine je jasno da izvodi $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ moraju biti različitog znaka, pa potencijal u oblasti prostora izmedju provodnika ne može imati maksimum ili minimum. To znači da



Slika 6.8: Sistem nekoliko provodnika.

naelektrisana čestica ne može biti u stabilnoj ravnoteži u tom polju jer potencijalna energija interakcije $W = q\phi$ nema minimum. Ovo je tzv. Irnšouova teorema.

Razmotrimo sistem od n provodnika prikazan na slici 6.8. Neka je naelektrisanje $i-$ tog provodnika q_i, $(i = 1, \ldots, n)$, a njegov potencijal ϕ_i. Zamislimo sada da su provodnici naelektrisani nekim drugim naelektrisanjima q_i' i da su njihovi potencijali ϕ_i'. Potencijal elektrostatičkog polja u prvoj situaciji obeležićemo sa $\phi(\mathbf{r})$, a u drugoj sa $\phi'(\mathbf{r})$. Zapremina V je ceo prostor izuzimajući prostor koji zauzimaju sami provodnici. Spoljnja granica ove oblasti ∂V je u beskonačnosti, dok su površine provodnika unutrašnja granica ove oblasti. Primenom drugog Grinovog identiteta imamo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r(\phi\triangle\phi' - \phi'\triangle\phi) = \oint_{\partial V}(\phi\nabla\phi' - \phi'\nabla\phi)\mathrm{d}\mathbf{S} - \sum_{i=1}^{n}\oint_{S_i}(\phi_i\nabla\phi' - \phi_i'\nabla\phi)\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{6.6.104}$$

Površina $i-$tog provodnika je S_i. Oba potencijala ϕ i ϕ' zadovoljavaju Laplasovu jednačinu. Granica ∂V je u beskonačnosti pa je prvi član sa desne strane nula. Naelektrisanje $i-$tog provodnika je

$$q_i = \epsilon_0 \oint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}_i\mathrm{d}S_i = -\epsilon_0\oint_{S_i}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}_i\mathrm{d}S_i \ , \tag{6.6.105}$$

gde smo sa $\mathbf{n}_i$ obeležili ort normale $i-$tog provodnika. Iz drugog Grinovog identiteta sledi

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\phi_i \ . \tag{6.6.106}$$

Formula (6.6.106) je Grinova teorema reciprociteta. Uzmimo sada da se naelektrisanje j-tog provodnika promeni za δq_j, a da naelektrisanja ostalih provodnika ostanu nepromenjena. Potencijali provodnika se promene sa ϕ_i na $\phi_i' = \phi_i + \delta\phi_i$. Iz Grinove teoreme reciprociteta (6.6.106) sledi

$$\phi_j(q_j + \delta q_j) + \sum_{i\neq j} q_i\phi_i = \sum_i q_i(\phi_i + \delta\phi_i) \ ,$$

odakle dobijamo

$$\phi_j = \sum_i S_{ji}q_i \ , \tag{6.6.107}$$

gde je $S_{ji} = \frac{\delta\phi_i}{\delta q_j}$. Veličine S_{ji} su koeficijenti potencijala. Iz (6.6.107) sledi $\delta\phi_j = \sum_j S_{ji}\delta q_i$ odakle je

$$S_{ji} = \frac{\delta\phi_j}{\delta q_i} \ .$$

Odavde zaključujemo da je matrica potencijala simetrična, tj. $S_{ij} = S_{ji}$. Invertovanjem relacije (6.6.107) dobijamo

$$q_i = \sum_j C_{ij}\phi_j \ . \tag{6.6.108}$$

Koeficijent C_{ii} je kapacitivnost $i-$ tog provodnika, dok su C_{ij} za $i \neq j$ uzajamne kapacitivnosti. Jasno je da je $C = S^{-1}$. Kapacitivnosti su pozitivne, dok su uzajamne kapacitivnosti negativne. Ako su svi provodnici sem $i-$tog uzemljeni onda je njegovova kapacitivnost $C_{ii} = \delta q_i/\delta\phi_i$. Sa porastom potencijala ovog provodnika raste i njegovo naelektrisanje, pa je $C_{ii} > 0$. Sa druge strane uzmimo da su svi provodnici sem $j-$tog uzemljeni. Naelektrisanje $i-$tog provodnika je $q_i = C_{ij}\phi_j$. Povećanjem potencijala $j-$tog provodnika, što se u ovoj situaciji postiže povećavanjem njegovog naelektrisanja, naelektrisanje drugih provodnika opada zbog indukcionog efekta. Elektroni sa Zemlje dolaze na te provodnike. To znači da je $C_{ij} < 0$ za $i \neq j$. Matrica kapaciteta C je takodje simetrična. Koeficijenti potencijala i kapaciteta zavise od geometrije sistema provodnika.

Primer 1. Dve sfere radijusa a i $b > a$ postavljene su koncentično. Odredite koeficijente C_{ij} i kapacitet ovog sistema.
Rešenje:

$$C_{11} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}, C_{12} = -4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}, C_{22} = 4\pi\varepsilon_0\frac{b^2}{b-a}, C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}.$$

6.7 Jednoznačnost Laplasove jednačine za sistem provodnika

Neka je V oblast prostora izmedju provodnika, kao što smo prikazali na slici 6.8. Spoljašnja granica ove oblasti je ∂V, a unutrašnju granicu čine površine provodnika. Potencijal u unutrašnjosti provodnika je stalan i jednak potencijalu na njegovoj površini, pa oblasti prostora koje zauzimaju provodnici možemo isključiti. Kao što smo već rekli u oblasti prostora izmedju provodnika potencijal zadovoljava Laplasovu jednačinu. Da bi Laplasova jednačina imala jednoznačno rešenje u oblasti definisanoj u uvodu potrebno je i dovoljno da
1. su na graničnoj površi oblasti V zadati ili Dirišleovi ili Nojmanovi granični uslovi;
2. za svaki provodnik znamo ili njegov potencijal ϕ_i ili njegovo ukupno naelektrisanje q_i.
Pretpostavićemo da postoje dva rešenja ϕ' i ϕ'' koja zadovoljavaju iste granične uslove. Njihova razlika

$$u = \phi' - \phi''$$

zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\triangle u = 0 \ . \tag{6.7.109}$$

Ukoliko potencijal na granici ∂V zadovoljava Dirišleov granični uslov onda je vrednost $u|_{\partial V} = 0$, a ukoliko je na granici zadat Nojmanov granični uslov za potencijal, tada je

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial V} = 0 \ .$$

Ako je na i-tom provodniku zadat potencijal onda $u_i = 0$, a ako je zadato naelektrisanje onda je

$$-\epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla u \cdot \mathbf{n}_i \mathrm{d}S_i = 0 \ . \tag{6.7.110}$$

Sa $\mathbf{n}_i$ obeležili smo ort normale $i-$tog provodnika. Zamenom $\psi = \chi = u$ u prvi Grinov identitet dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r ((\nabla u)^2 + u \triangle u) = \oint_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S - \sum_i \oint_{S_i} u_i \nabla u \cdot \mathbf{n}_i \mathrm{d}S_i \ . \tag{6.7.111}$$

Drugi sabirak sa leve strane je nula. Prvi sabirak sa desne strane, bilo da su zadati Dirišleovi bilo Nojmanovi granični uslovi isčezava, dok drugi sabirak sa desne strane

$$\sum_i \oint_{S_i} u_i \nabla u \cdot \mathbf{n}_i \mathrm{d}S_i = \sum_i u_i \oint_{S_i} \nabla u \cdot \mathbf{n}_i \mathrm{d}S_i \tag{6.7.112}$$

je takodje nula. Dakle

$$\int_V \mathrm{d}^3 r (\nabla u)^2 = 0 \tag{6.7.113}$$

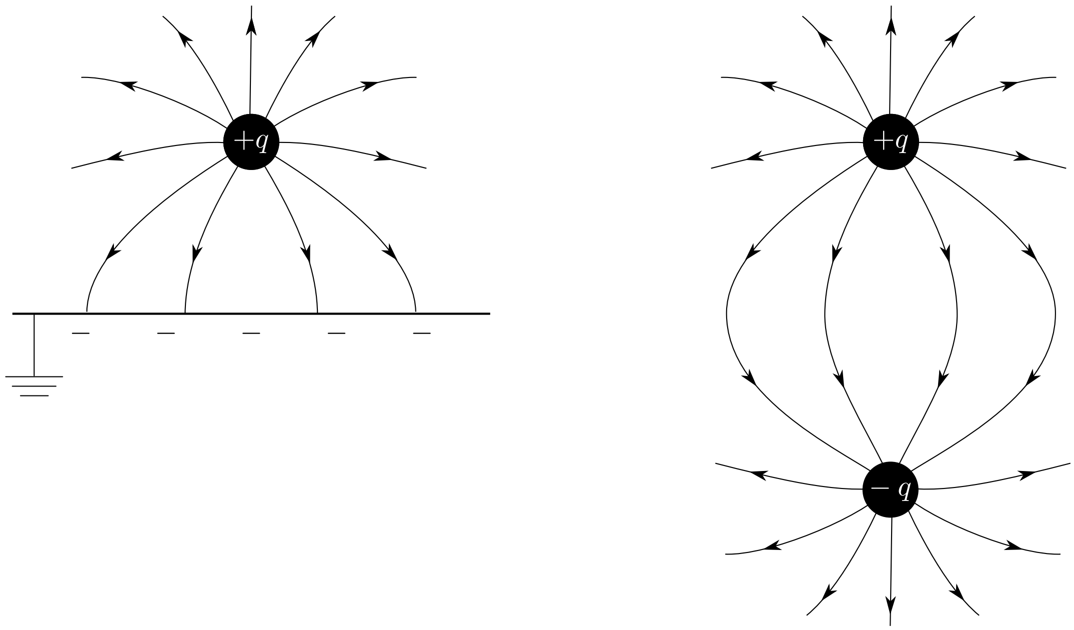
odakle sledi da je $u = C$, tj. rešenja ϕ' i ϕ'' se razlikuju do na konstantu, što je zapravo jedno te isto fizičko rešenje.

6.8 Metod likova

Neka se naelektrisanja q_i nalaze u prostoru izmedju provodnika. Na provodnicima se indukuju naelektrisanja. Ova indukovana naelektrisanja zajedno sa naelektrisanjima q_i generišu elektrostatičko polje. Metod likova sastoji se u tome da se nadju naelektrisanja-likovi q'_j koji zajedno sa polaznim naelektrisanjima generišu isto polje u odredjenoj oblasti prostora kao zadata i indukovana naelektrisanja na provodnicima.

Najprostiji primer je tačkasto naelektrisanje q koje se nalazi na rastojanju a od beskonačne provodne uzemljene[2] ravni. Neaelektrisanje q i indukovana naelektrisanja na provodnoj ravni u poluprostoru $z \geq 0$ generišu polje prikazano na levoj strani slike 6.9. Sa druge strane naelektrisanje q i $-q$ generišu polje prikazano na desnoj strani slike 6.9. Ravan $z = 0$ je ekvipotencijalna ravan na potencijalu $\phi = 0$. U oblasti $z \geq 0$ u oba slučaja imamo isto naelektrisanje q i iste

[2] Uzemljen provodnik je provodnik na nultom potencijalu.



Slika 6.9: Naelektrisanje u blizini ravnog provodnika.

granične uslove: potencijal je nula za $z = 0$ i u beskonačnosti. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti rešenja Poasonove jednačine sledi da potencijal mora biti isti u oba slučaja. Tako lik $-q$ zamenjuje naelektrisanja sa provodnika. Potencijal u oblasti $z \geq 0$ je

$$\phi(\rho, z \geq 0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z-a)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z+a)^2}}\Big) \ . \tag{6.8.114}$$

Površinska gustina naelektrisanja na provodniku se nalazi iz graničnog uslova

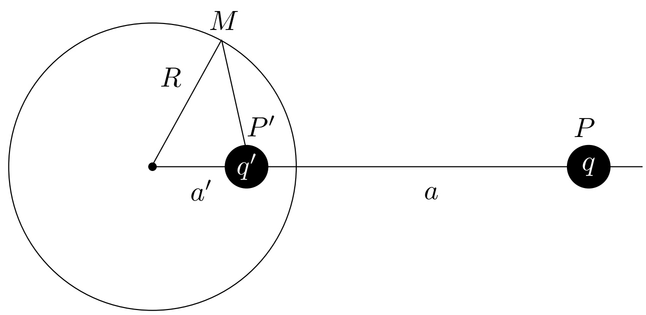
$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{q}{2\pi}\frac{a}{(a^2+\rho^2)^{3/2}} \ . \tag{6.8.115}$$

Ukupno indukovano naelektrisanje na provodniku je

$$2\pi \int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho\sigma = -q \ . \tag{6.8.116}$$

Drugi primer je provodna uzemljena kugla radijusa R i tačkasto naelektrisanje q na rastojanju $a > R$ od centra sfere. Naelektrisanje q indukuje naelektrisanja na površini kugle i oni generišu elektrostatičko polje u prostoru. Da li u ovom slučaju možemo da nadjemo lik q' naelektrisanja q? Neka je lik smešten u tačku P' kao na slici 6.10. Rastojanje OP obeležićemo sa a, a OP' sa a'. Sferna ekvipotencijlna površina je na nultom potencijalu (predpostavljamo da postoji takva površ). U tačkama na površini sfere je

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{q'}{\mathrm{P'M}} + \frac{q}{\mathrm{PM}}\Big) = 0 \ . \tag{6.8.117}$$



Slika 6.10: Naelektrisanje i metalna sfera.

Iz poslednjeg izraza je

$$q' = -\sqrt{\frac{R^2 + a'^2 - 2Ra'\cos\theta}{R^2 + a^2 - 2Ra\cos\theta}}q \ . \tag{6.8.118}$$

Po pretpostavci q' mora biti konstanta pa izvod podkorene funkcije po uglu θ je nula. Tako dobijamo

$$a'(R^2 + a^2) = a(R^2 + a'^2) \ , \tag{6.8.119}$$

odakle je

$$a' = \frac{R^2}{a} \tag{6.8.120}$$

i

$$q' = -\frac{R}{a}q \ . \tag{6.8.121}$$

Dakle, naelektrisanja q i q' generišu polje čija je ekvipotencijalna površ sfera radijusa R na nultom potencijalu. Na osnovu teoreme o jedinstvenosti rešenja Poasonove jednačine polje van ove sfere isto je kao i polje van uzemljene metalne kugle u prisustvu naelektrisanja q.

Primer 1. Odrediti silu kojom naelektrisanje q deluje na kuglu.
Rešenje: Rezultat je

$$\mathbf{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\mathbf{a}}{(a^2 - R^2)^2} \ ,$$

gde je $\mathbf{a}$ vektor položaja tačke P u odnosu na centar sfere.

6.9 Rešavanje Poasonove jednačine primenom Grinovih funkcija

Metod Grinovih funkcija je jedan od standardnih metoda za rešavanje diferencijalnih jednačina. Neka je

$$D_xF = J(x) \tag{6.9.122}$$

diferencijalna jednačina. Sa D smo obeležili diferencijalni operator, x je nezavisno promenljiva, $J = J(x)$ 'nehomegeni deo' jednačine ili 'izvor', a F je veličina koju želimo da odredimo. Grinova funkcija $G(x, x')$ je rešenje jednačine

$$D_x G(x, x') = \delta(x - x') \ , \tag{6.9.123}$$

gde je izvor polja delta funkcija. Dakle, Grinova funkcija je odgovor sistema na jediničnu pobudu. Dirakova delta funkcija je matrični element jediničnog operatora u koordinatnom prostoru, pa iz poslednjeg izraza sledi da je Grinova funkcija inverzni diferencijalni operator $G = D^{-1}$. Rešenje naše polazne diferencijalne jednačine je

$$F(x) = \int \mathrm{d}x' G(x, x') J(x') + F_0(x) \ , \tag{6.9.124}$$

gde je $F_0(x)$ rešenje homogene jednačine. Da je (6.9.124) doista rešenje lako se pokazuje:

$$\begin{aligned} D_x F &= \int \mathrm{d}x' D_x G(x, x') J(x') + D_x F_0 \\ &= \int \mathrm{d}x' \delta(x - x') J(x') \\ &= J(x) \ . \end{aligned} \tag{6.9.125}$$

Analizirajmo jedan jednostavan primer: harmonijski oscilator frekvence ω. Jednačina oscilatora je

$$\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\Big) x(t) = J(t) \ . \tag{6.9.126}$$

Vidimo da je

$$D = \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\Big)$$

diferencijalni operator, a $J(t)$ prinudna 'sila'. Odgovarajuća Grinova funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2\Big) G(t, t') = \delta(t - t') \ . \tag{6.9.127}$$

Rešenje jednačine oscilatora je

$$x(t) = \int \mathrm{d}x' G(x, x') J(x') + x_0(t) \ . \tag{6.9.128}$$

Grinova funkcija za Poasonovu jednačinu zadovoljava

$$\triangle' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \ . \tag{6.9.129}$$

Konstanta -4π sa desne strane jednačine nema neki poseban značaj. Ovako definisana Grinova funkcija $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ je potencijal u tački $\mathbf{r}'$ od tačkastog naelektrisanja $4\pi\epsilon_0$ koje se nalazi u $\mathbf{r}$. Na osnovu Dirak-Grinovog identiteta znamo da je

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{6.9.130}$$

partikularno rešenje (6.9.129). Opšte rešenje jednačine (6.9.129) je

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}+F(\mathbf{r},\mathbf{r}')\ , \tag{6.9.131}$$

gde je $F=F(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ rešenje homogene jednačine

$$\triangle' F(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0\ . \tag{6.9.132}$$

Ako stavimo da je $\chi=\phi(\mathbf{r}')$ i $\psi=G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ u drugi Grinov identitet (A.0.14) dobijamo

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\Big(\phi(\mathbf{r}')\triangle' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\triangle'\phi(\mathbf{r}')\Big)=\oint_{\partial V}\Big(\phi\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')-G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\phi\Big)\mathrm{d}\mathbf{S}'\ . \tag{6.9.133}$$

Primenom (6.9.129) dolazimo do

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'+\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\Big(G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla'\phi-\phi\nabla' G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big)\mathrm{d}\mathbf{S}'\ , \tag{6.9.134}$$

odnosno

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'+\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\Big(G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial\phi}{\partial n'}-\phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G}{\partial n'}\Big)\mathrm{d}S'\ , \tag{6.9.135}$$

gde je $\mathbf{n}'$ ort granične površine. Ako nadjemo Grinovu funkciju onda primenom gornje formule odredjujemo potencijal. Potencijal ima dva sabirka. U prvom figuriše Grinova funkcija, a drugi sabirak je površinski član. U njemu su prisutni potencijal, Grinova funkcija i njihovi izvodi u pravcu normale na granici.

Homogen deo F Grinove funkcije je proizvoljan, pa ona nije jednoznačno odredjena. Zbog toga možemo, nezavisno od potencijala, nametnuti odredjene granične uslove na Grinovu funkciju. Najčešće se koriste Dirišleova i Nojmanova Grinova funkcija. Dirišleov granični uslov za Grinovu finkciju je

$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\Big|_{\mathbf{r}'\in S}=0\ , \tag{6.9.136}$$

pa (6.9.135) postaje

$$\phi(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3r'-\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V}\phi(\mathbf{r}')\frac{\partial G_{\mathrm{D}}}{\partial n'}\mathrm{d}S'\ . \tag{6.9.137}$$

Dirišleova Grinova funkcija je simetrična na zamenu argumenata $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, tj.

$$G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=G_{\mathrm{D}}(\mathbf{r}',\mathbf{r})\ . \tag{6.9.138}$$

Da biste ovo pokazali primenite drugi Grinovog identitet

$$\int_V \mathrm{d}^3y(\phi\triangle\psi-\psi\triangle\phi)=\oint_{\partial V}(\phi\nabla\psi-\psi\nabla\phi)\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{6.9.139}$$

sa

$$\phi = G_{\rm D}(\mathbf{r}, \mathbf{y}), \quad \psi = G_{\rm D}(\mathbf{r}', \mathbf{y}) \ . \tag{6.9.140}$$

Pri nametanju Nojmanovog graničnog uslova moramo biti oprezni. Naime izbor

$$\frac{\partial G_{\rm N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}\Big|_{\mathbf{r}'\in S} = 0 \tag{6.9.141}$$

je nekonzistentan sa (6.9.129). Integraljenjem (6.9.129) po oblasti V dobijamo

$$\int {\rm d}^3 r' \triangle' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \tag{6.9.142}$$

odnosno, primenom Gausove teoreme

$$\oint_S {\rm d}S' \frac{\partial G}{\partial n'} = -4\pi \ . \tag{6.9.143}$$

Sad je jasno da izvod Grinove funkcije u pravcu normale na graničnoj površi ne može biti nula. Zato se za Nojmanov granični uslov uzima

$$\frac{\partial G_{\rm N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n'}\Big|_{\mathbf{r}'\in S} = -\frac{4\pi}{S} \ , \tag{6.9.144}$$

pa je

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V G_{\rm N}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'){\rm d}^3 r' + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}')}{\partial n'} G_{\rm N}{\rm d}S' + \langle\phi\rangle_S \ , \tag{6.9.145}$$

gde je

$$\langle\phi\rangle_S = \frac{1}{S}\oint {\rm d}S\phi \tag{6.9.146}$$

srednja vrednost potencijala na graničnoj površini.

Primer 1. Sfera radijusa b, nalazi se na nultom potencijalu. Unutar sfere postavljen je prsten poluprečnika a. Centar prstena se poklapa sa centrom sfere. Prsten je ravnomerno naelektrisan naelektrisanjem Q. Odrediti Dirišleovu Grinovu funkciju i na osnovu nje odrediti potencijal unutar sfere.
Rešenje: Grinova funkcija je data sa (6.9.131). Neka Grinova funkcija zadovoljava Dirišleov granični uslov. Funkcija $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ u (6.9.131) se odredjuje primenom metoda likova. Rezultat je

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} - \frac{b/r}{|\mathbf{r}' - \frac{b^2}{r^2}\mathbf{r}|} \ . \tag{6.9.147}$$

Ako sa $r_<(r_>)$ obeležimo manju odnosno veću vrednost izmedju r i a, onda primenom (C.0.27) imamo

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\Big(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r^l r'^l}{b^{2l+1}}\Big)Y^*_{lm}(\theta', \varphi')Y_{lm}(\theta, \varphi) \ , \tag{6.9.148}$$

gde su θ' i φ' sferne koordinate vektora $\mathbf{r}'$, a θ i φ sferne koordinate vektora $\mathbf{r}$. Grinova funkcija (6.9.148) je data u obliku razvoja po sfernim koordinatama. Ovaj oblik Grinove funkcije je komplikovaniji od (6.9.147), ali je pogodniji za integraciju, tj. za nalaženje potencijala. Generalno razvoj Grinove funkcije u sfernim koordinatama dat je u [1], poglavlje 3.10. Gustina naelektrisanja prstena je

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{2\pi a^2}\delta(r'-a)\delta(\cos\theta') \ .$$

Površinski član u izrazu (6.9.137) je jednak nuli, jer je potencijal sfere jednak nuli. Prema tome imamo

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\int_0^b \mathrm{d}r' r'^2 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta'\sin\theta' \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\delta(r'-a)\delta(\cos\theta') \\ &\times \left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r^l r'^l}{b^{2l+1}}\right)Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \ . \end{aligned} \tag{6.9.149}$$

Integracija po φ' anulira članove $m \neq 0$. Preostale dve integracija daju

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{r^l a^l}{b^{2l+1}}\right)P_l(0)P_l(\cos\theta) \ . \tag{6.9.150}$$

Primenom (C.0.8) dobijamo

$$\phi = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}a^{2l}\left(\frac{1}{r^{2l+1}} - \frac{r^{2l}}{b^{4l+1}}\right)P_{2l}(\cos\theta), & a<r<b \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(2l)!}{2^{2l}(l!)^2}r^{2l}\left(\frac{1}{a^{2l+1}} - \frac{a^{2l}}{b^{4l+1}}\right)P_{2l}(\cos\theta), & r<a \end{cases} \ . \tag{6.9.151}$$

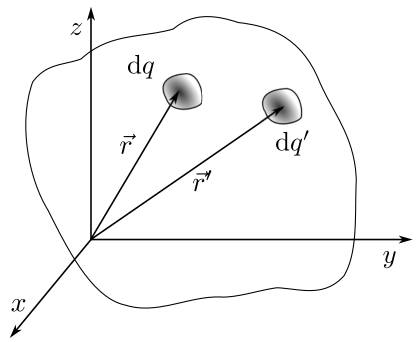
6.10 Energijski odnosi u elektrostatičkom polju

Na osnovu Pointingove teoreme energija elektrostatičkog polja u vakuumu u oblasti V data je sa

$$W = \int_V \mathrm{d}^3r \frac{\epsilon_0\mathbf{E}^2}{2} \ . \tag{6.10.152}$$

Primenom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ i vektorskog identiteta (A.0.4), energija polja se transformiše prema

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3r \mathbf{E}\cdot\nabla\phi \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\mathrm{div}(\phi\mathbf{E}) - \phi\,\mathrm{div}\mathbf{E}\Big) \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2}\oint_S \phi\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\rho\phi \ . \end{aligned} \tag{6.10.153}$$



Slika 6.11: Sopstvena energija.

Potpuno polje u konačnoj oblasti prostora je polje koje je jednako nuli na granici ove konačne oblasti. Ako je oblast prostora beskonačna, tj. $V = R^3$ za polje ćemo reći da je potpuno ako na velikim rastojanjima opada bar kao $1/r^2$. Na velikim rastojanjima potencijal takvog polja se ponaša kao $1/r$, ili brže opada u nulu. Ukoliko je polje potpuno površinski član u (6.10.153) je jednak nuli, pa je energija elektrostatičkog polja

$$W = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \rho\phi \ . \tag{6.10.154}$$

U prethodnom izrazu se integrali u oblasti u kojoj je zapreminska gustina naelektrisanja nenulta. Energiju polja možemo, koristeći izraz za potencijal, da prepišemo u sledećem obliku

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \ . \tag{6.10.155}$$

Podintegralni izraz u gornjoj formuli je energija interakcije naelektrisanja $\rho(\mathbf{r})\mathrm{d}^3 r$ i $\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}^3 r'$ koji su u tačkama $\mathbf{r}$ odnosno $\mathbf{r}'$, kao što je prikazano na slici 6.11. Faktor $1/2$ je prisutan u izrazu (6.10.155) jer se doprinos energiji od svakog para elementarnih naelektrisanja računa dva puta. Energija (6.10.155) je sopstvena energija zapreminske raspodele naelektrisanja $\rho = \rho(\mathbf{r})$. Neka električno polje generišu dve raspodele naelektrisanja ρ_1 i ρ_2. Ukupno električno polje je $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$, gde su $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ i $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ polja koja generišu ove dve raspodele. Energija polja je data sa

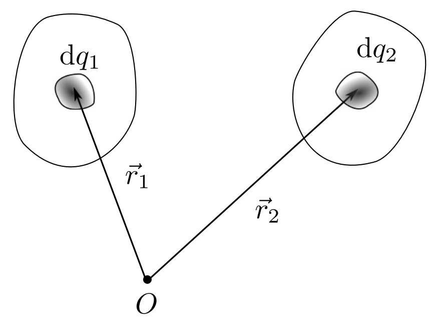
$$W = \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}_1^2 + \frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}_2^2 + \epsilon_0\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 \ . \tag{6.10.156}$$

Prva dva člana predstavlju sopstvene energije prve, odnosno druge raspodele naelektrisanja, dok je poslednji sabirak energija interakcije ove dva raspodele. Ako zamenimo $\mathbf{E}_2 = -\nabla\phi_2$ u izraz za energiju interakcije

$$W_{\mathrm{int}} = \epsilon_0\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2 \ , \tag{6.10.157}$$

dobićemo

$$W_{\mathrm{int}} = \int_{V_1} \mathrm{d}^3 r \rho_1(\mathbf{r})\phi_2(\mathbf{r}) \ . \tag{6.10.158}$$



Slika 6.12: Energija interakcije.

Analogno, zamenom $\mathbf{E}_1 = -\nabla\phi_1$ dolazi se do

$$W_{\rm int} = \int_{V_2} {\rm d}^3 r \rho_2(\mathbf{r})\phi_1(\mathbf{r}) \; . \tag{6.10.159}$$

Jasno je da su izrazi (6.10.158) i (6.10.159) jednaki. Zamenom izraza za potencijal koji potiče od druge raspodele naelektrisanja u (6.10.158) dobijamo

$$W_{\rm int} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V_1}\int_{V_2} \frac{\rho_1(\mathbf{r}_1)\rho_2(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}{\rm d}^3 r_1 {\rm d}^3 r_2 \; . \tag{6.10.160}$$

U izrazima za energiju interakcije dve raspodele naelektrisanja nema faktora $1/2$, jer se energija interakcija svakog para uračunava jedanput.

Odredimo potencijalnu energiju interakcije sistema (nepokretnih) naelektrisanih čestica sa spoljašnjim poljem $\phi(\mathbf{r})$. Ovo polje generišu neka druga naelektrisanja. Zamenom izraza za zapreminsku gustinu naelektrisanja

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha) \tag{6.10.161}$$

u izraz za energiju interakcije, dobija se

$$W_{\rm int} = \int {\rm d}^3 r \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha)\phi(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \phi(\mathbf{r}_\alpha) \; . \tag{6.10.162}$$

Sopstvena potencijalna energija sistema naelektrisanih čestica je

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{N} q_\alpha \phi_\alpha \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{\alpha\neq\beta}\frac{q_\alpha q_\beta}{|\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta|}, \end{aligned} \tag{6.10.163}$$

gde smo divergentne članove $\alpha = \beta$ u gornjoj sumi izostavili. Sopstvena energija tačkastog naelektrisanja

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2} \tag{6.10.164}$$

je beskonačna zbog ponašanja podintegralnog izraza u donjoj granici integracije [3]. Pojava nefizičke beskonačnosti ukazuje da na malim rastojanjima klasična elektrodinamika prestaje da važi. Ako je naelektrisanje kuglice radijusa a jednako q, elektrostatička energija ima oblik

$$W = \kappa\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{a} \ , \tag{6.10.165}$$

gde je κ koeficijent reda jedinice. Koeficijent κ zavisi od konkretne raspodele naelektrisanja unutar kuglice. Ako ovu energiju izjednačimo sa mc^2, gde je m masa elektrona dobijamo

$$a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \ . \tag{6.10.166}$$

Za elektron a je reda veličine 10^{-15}m i naziva se klasičnim radijusom elektrona. Na ovom rastojanju klasična elektrodinamika prestaje da važi. Ovaj rezultat smo dobili iz same klasične elektrodinamike. Medjutim, u okviru kvantne elektrodinamike dobija se da klasična elektrodinamika prestaje da važi još na rastojanjima reda Komptonove talasne dužini elektrona

$$\lambda_c = \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-13}\mathrm{m} \ . \tag{6.10.167}$$

Neka spoljašnje elektrostatičko polje generišu naelektrisanja koja su na velikom rastojanju od oblasti prostora koju zauzima neka raspodela nealektrisanja $\rho(\mathbf{r})$. Unutar ove oblasti izmena potencijala spoljašnjnjeg polja $\phi(\mathbf{r})$ je mala. Zbog toga potencijal možemo razviti u stepeni red oko pola koordinatnog sistema koji se nalazi unutar ove raspodele i zadržati samo prvih nekoliko članova. Energija interakcije spoljneg polja sa naelektrisanjima $\rho(\mathbf{r})$ je onda

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{int}} &= \int_V \mathrm{d}^3 r\rho\phi = \int_V \mathrm{d}^3 r\rho(\mathbf{r})\Big[\phi(0) + x_i\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\Big|_0 + \dots\Big] \\ &= Q\phi(0) - \mathbf{p}\cdot\mathbf{E}(0) + \dots \ . \end{aligned} \tag{6.10.168}$$

Prvi član predstavlja energiju interakcije ukupnog naelektrisanja sistema koje se nalazi u koordinatnom početku sa spoljnjim poljem. Naredni član je dipolna interakcija. Više članove nismo pisali. Iz ovog izraza vidimo da je energija interakcija stalnog dipola momenta $\mathbf{p}$ sa spoljašnjim poljem data sa

$$W = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E} \ . \tag{6.10.169}$$

Slično, silu kojom spoljašnje polje deluje na naelektrisanje opisano raspodelom naelektrisanja $\rho(\mathbf{r})$ možemo razviti po multipolima:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_V \mathrm{d}^3 r\rho\mathbf{E} = \int_V \mathrm{d}^3 r\rho(\mathbf{r})\Big[\mathbf{E}(0) + x_i\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_i}\Big|_0 + \dots\Big] \\ &= Q\mathbf{E}(0) + (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}(0) + \dots \ . \end{aligned} \tag{6.10.170}$$

[3] Ako bi donje granica integracije bila ϵ integral se ponaša kao $1/\epsilon$.

Prvi član u (6.10.170) je monopolni, a sledeći dipolni. Elektrostatička sila je konzervativna, jer je

$$\mathbf{F} = -\nabla W_{\rm int} \ . \tag{6.10.171}$$

Sila kojom spoljnje elektrostatičko polje deluje na dipol je

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E} \ . \tag{6.10.172}$$

Moment sile kojom spoljnje polje deluje na sistem naelektrisanja koji miruju je

$$\mathbf{M} = \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{r}\times\rho\mathbf{E} = \mathbf{p}\times\mathbf{E}(0) + \dots . \tag{6.10.173}$$

Nadjimo sada elektrostatičku potencijalnu energiju sistema od N naelektrisanih provodnika. Naelektrisanje na $i-$tom provodniku obeležićemo sa q_i, a potencijal sa ϕ_i. Uzećemo da je oblast V oblast prostora izmedju provodnika. Granica ove oblasti je unija spoljašnje granice S koja je u beskonačnosti i same površine provodnika. Površina $i-$tog provodnika je S_i. Energija polja je

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{E}\cdot\nabla\phi \\ &= -\frac{\epsilon_0}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r\Big(\mathrm{div}(\phi\mathbf{E}) - \phi\,\mathrm{div}\mathbf{E}\Big) \ . \end{aligned} \tag{6.10.174}$$

Primeno Gausove teoreme imamo

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2}\oint_S \phi\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{\epsilon_0}{2}\sum_i\oint_{S_i}\phi\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{6.10.175}$$

Površinski integral po površini S je jednak nuli jer se podintegralna funkcija ponaša bar kao $1/r$. Medjutim drugi sabirak, u kojem integralimo po površinama provodnika, nije jednak nuli. Primenom Gausove teoreme u elektrostatici dobijamo

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0\sum_i\phi_i\oint_{S_i}\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{2}\sum_i\phi_i q_i \ . \tag{6.10.176}$$

Formulu za potencijalnu energiju možemo prepisati preko koeficijenata potencijala, odnosno kapaciteta na sledeći način:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,j}C_{ij}\phi_i\phi_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}S_{ij}q_i q_j \ . \tag{6.10.177}$$

Vidimo da je energija bilinearna forma pa naelektrisanjima provodnika. Energija sistema provodnika je pozitivna, jer smo krenuli od izraza koji je kvadratan po jačini polja. Kvadratna forma (6.10.177) je pozitivna, ako važe sledeći uslovi

$$C_{ii}C_{jj} > C_{ij}^2 \ .$$

Primer 1. Kugla radijusa R, naelektrisana je gustinom naelektrisanja $\rho = Kr^n$, gde su K i n pozitivne konstante. Oblast prostora van kugle je ispunjena provodnikom. Naći energiju električnog polja preko polja i preko potencijala.
Rešenje: U oblasti prostora van kugle polje je nula. Unutar kugle polje ima oblik $\mathbf{E} = E(r)\mathbf{e}_r$, pa primenom Gausove teoreme dobijamo

$$\mathbf{E} = \frac{K}{\epsilon_0(n+3)} r^{n+1} \mathbf{e}_r \ .$$

Potencijal polja se najlakše dobija iz $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Rezultat je

$$\phi = \begin{cases} -\frac{K}{\epsilon_0(n+3)(n+2)} r^{n+2}, & r < R \\ -\frac{K}{\epsilon_0(n+3)(n+2)} R^{n+2}, & r \geq R \ . \end{cases}$$

Naelektrisanja na površini kugle se dobijaju iz graničnog uslova:

$$\sigma = -\epsilon_0 E(R) = -\frac{K}{n+3} R^{n+1} \ .$$

Energija polja se može odrediti primenom (6.10.152). Rezultat je

$$W = \frac{2\pi K^2}{\epsilon_0(n+3)^2(2n+5)} R^{2n+5} \ .$$

Isti rezultat dobijamo i primenom formule

$$W = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \rho\phi + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}S\sigma\phi \ . \tag{6.10.178}$$

Primer 2. Neka dipolni moment dipola zavisi od spoljašnjeg električnog polja $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{E})$. Pokazati da je energija ovakvog dipola u spoljnjem električnom polju data sa

$$W = -\int \mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{E} \ .$$

Rešenje: Sila kojom električno polje deluje na dipol je $\mathbf{F} = (\mathbf{p}\cdot\nabla)\mathbf{E}$, pa je

$$W = -\int \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = -\int p_i \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \mathrm{d}x_j \ .$$

Sila je konzervativna, pa integral ne zavisi od putanje po kojoj integralimo. Izaberimo da je putanja $x-$osa. Tada je

$$W = -\int \Big(p_1 \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial E_1}{\partial x_2} + p_3 \frac{\partial E_1}{\partial x_3} \Big) \mathrm{d}x_1 \ .$$

Iz rot$\mathbf{E} = 0$ sledi

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_2} = \frac{\partial E_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial E_1}{\partial x_3} = \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \ .$$

Zamenom u izraz za potencijalnu energiju dobijamo

$$W = -\int \mathbf{p}\cdot \mathrm{d}\mathbf{E} \ .$$

Glava 7

Dielektrici u konstantnom električnom polju

U ovoj glavi se razmatra elektrostatičko polje u dielektričnim sredinama. Posebna pažnja posvećena je mehanizmima polarizovanja sredine. U zadnjem poglavlju naći ćemo silu koja deluje na dielektrik.

7.1 Osnovne veličine

Pod dejstvom spoljašnjeg elektrostatičkog polja dielektrici se polarizuju, što znači da je polarizacija dielektrika $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ različita od nule. Polarizacija u vakuumu je jednaka nuli. $\mathbf{D}-$vektor je

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \ , \tag{7.1.1}$$

gde je $\mathbf{E}$ makroskopsko polje u dielektriku. Ono je dobijeno usrednjavanjem mikroskopskog polja, $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}) \rangle$. Kako je $\mathbf{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \mathbf{E}$, gde je $\hat{\epsilon}$ tenzor električne propustljivosti sredine to je

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\hat{\epsilon} - 1) \mathbf{E} = \epsilon_0 \hat{\chi}_e \mathbf{E} \ , \tag{7.1.2}$$

gde je $\hat{\chi}_e = \hat{\epsilon} - 1$ tenzor električne susceptibilnosti dielektrika.

7.2 Klauzijus-Mosotijeva relacija

Makroskopsko polje u sredini, $\mathbf{E}$ dobijeno je usrednjavanjem mikroskopskog električnog polja po zapremini mnogo većoj od zapremine samog molekula. Ta zapremina je makroskopski mala a mikroskopski velika. Efektivno polje koje deluje na uočeni molekul dielektrične sredine obeležićemo sa $\mathbf{E}'$ i ono se u opštem slučaju ne poklapa sa makroskopskim poljem. Polje $\mathbf{E}'$ potiče od spoljnjeg polja i polja molekula sredine isključujući uočeni molekul. Za razredjene sredine je $\mathbf{E}' \approx \mathbf{E}$. Medjutim kod tečnosti i čvrstih tela molekuli su gusto pakovan, pa je efektivno polje različito od makroskopskog polja. Neka je R poluprečnik sfere čiji se centar poklapa sa uočenim molekulom. Unutar sfere nalazi se veliki broj molekula, ali je taj broj mnogo manji od ukupnog broja molekula dielektrika. Polje $\mathbf{E}'$ ćemo napisati u obliku $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{E}_i$, gde je $\mathbf{E}_i$ korekcija polja. Polje $\mathbf{E}_i$ je $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{\text{okolni}} - \mathbf{E}_P$, gde je $\mathbf{E}_{\text{okolni}}$ polje u centru sfere koje potiče od molekula iz sfere ne računajući uočeni molekul. Polje $\mathbf{E}_P$ je makroskopsko polje unutar kugle radijusa R čija je polarizacija $\mathbf{P}$ skoro konstantna. U Primeru 3 u poglavlju 6.5.2 pokazali smo da je ovo polje dato sa $\mathbf{E}_P = -\frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0}$. Dakle, da bismo našli polje $\mathbf{E}'$ treba da od makroskopskog polja $\mathbf{E}$ oduzmemo polje $\mathbf{E}_P$ i dodamo polje okolnih melekula. U većini slučajeva, iz simetrijskih razloga $\mathbf{E}_{\text{okolni}} = 0$. Dakle, efektivno polje koje deluje na molekul je

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \ . \tag{7.2.3}$$

Električni dipolni moment molekula je funkcija polja $\mathbf{E}'$. Razvićemo dipolni moment molekula u red oko nultog polja:

$$\mathbf{p}(\mathbf{E}') = \mathbf{p}(0) + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial E'_i}\Big|_0 E'_i + \dots \ , \tag{7.2.4}$$

odnosno po komponentama

$$p_j = p_j(0) + \epsilon_0 \beta_{ji} E'_i + \dots \ , \tag{7.2.5}$$

gde je $\beta_{ji} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial p_j}{\partial E_i}\Big|_0$ tenzor polarizabilnosti molekula. Dakle, električni dipolni moment molekula je

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \epsilon_0 \hat{\beta} \mathbf{E}' + \dots \ . \tag{7.2.6}$$

Prvi član je sopstveni dipolni moment molekula. Molekuli koji imaju sopstveni dipolni moment različit od nule su polarni molekuli (npr. H_2O, HCl). Za nepolarne molekule je $\mathbf{p}_0 = 0$. Nepolarni molekuli su O_2, H_2, CH_4. Tenzor polarizabilnosti molekula je mikroskopski, dok je tenzor susceptibilnosti makroskopski parametar.

Uzećemo da su molekuli sredine nepolarni i da je polarizabilnost molekula β skalar. Polarizacija je

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle = n\epsilon_0 \beta \mathbf{E}' \ , \tag{7.2.7}$$

gde je n broj molekula po jedinici zapremine (koncentracija molekula). Zamenom (7.2.3) u prethodni izraz dolazimo do

$$\mathbf{P} = n\epsilon_0 \beta \Big(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\epsilon_0} \Big) \ , \tag{7.2.8}$$

odakle je

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \frac{n\beta}{1 - \frac{n\beta}{3}} \mathbf{E} \ . \tag{7.2.9}$$

Sredina je linearna i dielektrična susceptibilnost je

$$\chi_e = \frac{n\beta}{1 - \frac{n\beta}{3}} \ . \tag{7.2.10}$$

Odavde je

$$\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{n\beta}{3} = \frac{N_A \rho \beta}{3M} \ , \tag{7.2.11}$$

gde je N_A Avogadrov broj, ρ masena gustina, M molska masa. Poslednja relacija je Klauzijus-Mosotijeva relacija. Ona se dobro slaže sa eksperimentalnim podacima za razredjene supstance, kao što su gasovi. Za tečnosti i gasova postoje odstupanja od ove formule.

7.3 Modeli polarizovanja dielektrika

Postoje dva mehanizma polarizovanja sredine. Jedan je tzv. orjentaciono polarizovanje, a drugi deformaciono. Pod dejstvom polja doći ce do preraspodele naelektrisanja molekula, što uzrokuju indukovanje dipolnog momenta molekula. Ovaj mehanizam polarizovanja sredine je deformacioni. Sa druge strane spoljašnje polje teži da molekule, koji su mali dipoli, orjentiše u smeru polja. Termalno kretanje molekula se suprostavlja težnji spoljašnjeg polja da orjentiše dipole. Ovaj mehanizam je orjentaciono polarizovanje. Kod polarnih molekula sopstveni moment je mnogo veći od indukovanog, pa je za njih karakteristično orjentaciono polarizovanje. Sa druge strane za nepolarne molekule dominatno je indukovanje dipolnog momenta, tj. deformaciono polarizovanje.

Analizirajmo prvo orjentaciono polarizovanje. Ono je zasnovano na teoriji koja potiče od Lanžvena. Razmatrajmo izotropan dielektrik. Energija interakcije molekula sa spoljnjim poljem je $U = -\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}$, gde je $\mathbf{p}_0$ sopstveni dipolni moment molekula. Indukovani dipolni moment je zanemarljiv. Dipol-dipol interakcija izmedju molekula je takodje zanemarljiva. Uzećemo da je spoljnje polje duž $z-$ose, $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_3$. Orjentacija molekula je data sa dve generalisane koordinate θ i ϕ.

Srednja vrednost dipolnog momenta molekula je odredjena, po Bolcmanovoj raspodeli, sa

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \mathbf{p}_0 e^{\frac{p_0 E \cos\theta}{kT}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi}{\int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\frac{p_0 E \cos\theta}{kT}} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi} \tag{7.3.12}$$

Uvešćemo oznaku $a = \frac{p_0 E}{kT}$. Integral u brojiocu izraza (7.3.12) je

$$\begin{aligned} I_1 &= p_0 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi (\sin\theta\cos\phi \mathbf{e}_1 + \sin\theta \sin\phi \mathbf{e}_2 + \cos\theta \mathbf{e}_3) e^{a\cos\theta} \\ &= 2\pi p_0 \mathbf{e}_3 \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta \cos\theta e^{a\cos\theta} \\ &= 2\pi p_0 \mathbf{e}_3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \Big(\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \sin\theta e^{a\cos\theta} \Big) \\ &= 2\pi p_0 \mathbf{e}_3 \frac{(e^a + e^{-a})a - (e^a - e^{-a})}{a^2} \ . \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

Srednja vrednost dipolnog momenta je

$$\langle \mathbf{p} \rangle = p_0 \Big(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \Big) \mathbf{e}_3 \ , \tag{7.3.14}$$

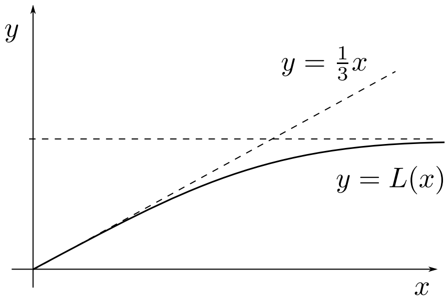
odnosno

$$\langle \mathbf{p} \rangle = p_0 L(a) \mathbf{e}_3 \ , \tag{7.3.15}$$

gde je

$$L(a) = \coth a - \frac{1}{a} \tag{7.3.16}$$

Lanžvenova funkcija. Lanžvenova funkcija je nacrtana na slici 7.1. Ova funkcija je rastuća, ima horizontalnu asimptotu, $y = 1$. Tangenta na funkciju u tački $(0,0)$ je $y = x/3$. Na sobnoj



Slika 7.1: Lanžvenova funkcija.

temperaturi $T = 300$K je $kT \approx 0,025$eV. Red veličine dipolnog momenta je $p \approx 10^{-10}e$m. Za polja koja su mnogo manja od 10^6Vcm^{-1}, veličina $a = \frac{p_0 E}{kT} \ll 1$ je mala. Dakle, za slaba polja odnosno visoke temperature je $L(a) \approx a/3$, pa veza izmedju polja i dipolnog momenta postaje linearna

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{p_0^2}{3kT}\mathbf{E} \ . \tag{7.3.17}$$

Polarizacija dielektrika je

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle = \frac{np_0^2}{3kT}\mathbf{E} \ , \tag{7.3.18}$$

odakle je relativna električna propustljivost

$$\epsilon = 1 + \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 kT} \ . \tag{7.3.19}$$

Sa porastom temperature električna propustljivost opada.

Sada ćemo analizirati deformaciono polarizovanje. Primenićemo Lorencovu elektronsku teoriju. Smatraćemo da su elektroni elastično vezani za jezgro (tzv. oscilatorni model atoma). Elektron indeksa s osciluje sa sopstvenom frekvencom ω_s. Jednačina kretanja elektrona unutar molekula je

$$m\ddot{\mathbf{r}}_s = -m\omega_s^2 \mathbf{r}_s - e\mathbf{E} \ , \tag{7.3.20}$$

gde je $\mathbf{E}$ spoljnje polje. U elektrostatičkom polju elektroni se nalaze u ravnoteži. Ravnotežni položaj elektrona je odredjen sa

$$\mathbf{r}_{0s} = -\frac{e\mathbf{E}}{m\omega_s^2} \ . \tag{7.3.21}$$

Električni dipolni moment molekula je prema tome

$$\mathbf{p} = \frac{e^2}{m}\sum_{s=1}^{Z}\frac{1}{\omega_s^2}\mathbf{E} \ , \tag{7.3.22}$$

odakle je polarizabilnost molekula data sa

$$\beta = \frac{e^2}{\epsilon_0 m}\sum_{s=1}^{Z}\frac{1}{\omega_s^2} \ . \tag{7.3.23}$$

Polarizabilnost atoma odnosno molekula ima dimenzije zapremine, pa je ona reda veličine zapremine atoma, odnosno molekula $\beta \sim a^3 \sim 10^{-29}\mathrm{m}^3$. Kako je koncentracija molekula gasa $n \sim 10^{25}\mathrm{m}^{-3}$ to je susceptibilnost gasova $\chi_e = n\beta \sim 10^{-4}$. Električna propustljivost vazduha je $1,00054$. Za čvrsta i tečna tela $n \sim 10^{28}\mathrm{m}^{-3}$ pa je susceptibilnost reda 1.

7.4 Sila i energija

Na osnovu Pointingove teoreme promena energije statičkog električnog polja u dielektriku je data sa

$$\delta W = \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \ , \tag{7.4.24}$$

gde je $\delta\mathbf{D}$ mala promena $\mathbf{D}-$vektora. Da bismo odredili energiju polja u dielektriku moramo precizirati vezu izmedju vektora $\mathbf{D}$ i električnog polja. Za linearne dielektrike, ova veza je data sa $\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon \mathbf{E}$, pa je energija elektrostatičkog polja

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3 r \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \ . \tag{7.4.25}$$

Naša dalja analiza se odnosi na linearne dielektrike. Primenom $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ i Gausove teoreme imamo

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{2} \int_V d^3 r \mathbf{D} \cdot \nabla \phi \\ &= -\frac{1}{2} \int_V d^3 r \mathrm{div}(\phi \mathbf{D}) + \frac{1}{2} \int_V d^3 r \phi \mathrm{div} \mathbf{D} \ . \end{aligned} \tag{7.4.26}$$

Ako polja na velikim rastojanjima teže nuli bar kao $1/r^2$, površinski integral je jednak nuli, pa je energija polja u dielektriku

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3 r \phi \rho \ . \tag{7.4.27}$$

U poslednjoj formuli ρ je gustina slobodnih i spolja unetih naelektrisanja u sredinu. Da ponovimo još jednom da bi $\rho \neq 0$ nije dovoljno da u sredini postoje slobodna naelektrisanja, već ona moraju biti u višku ili u manjku.

Sila kojom električno polje deluje na dielektrik naziva se ponderomotornom silom. Da bismo je odredili primenićimo metod virtuelnih pomeranja, tj. varijacioni račun. Neka se pri virtuelnom pomeranju delić sredine iz tačke $\mathbf{r}$ infinitezimalno pomeri u tačku $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Veličina $\delta\mathbf{r} = \delta\mathbf{r}(\mathbf{r})$ se naziva virtuelnim pomeranjem. Virtuelno pomeranje zavisi od $\mathbf{r}$, tj. različiti delići dielektrika se virtuelno pomeraju za različite iznose. Ova promena uzrokuje promenu svih veličina: električne propustljivosti, potencijala polja, gustine naelektrisanja, gustine mase supstance i drugih. Pri virtuelnom pomeranju gustina naelektrisanja se promeni prema $\rho(\mathbf{r}) \to \rho'(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$.

Elementarno mala zapremina dielektrika $\mathrm{d}V$ pri virtuelnom pomeranju prelazi u zapreminu $\mathrm{d}V'$. Infinitezimalno malu zapreminu $\mathrm{d}V'$ možemo izraziti u starim koordinatama $\mathrm{d}V' = |J|\mathrm{d}V$, gde je Jakobijan dat sa

$$J = \det\left(\delta_{ij} + \frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_j}\right) \tag{7.4.28}$$

Primenom formule $\det M = e^{\mathrm{tr}\ln M}$ dobijamo

$$\begin{aligned} J &= e^{\mathrm{tr}\ln\left(\delta_{ij}+\frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_j}\right)} = e^{\mathrm{tr}\left(\frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_j}\right)} \\ &= 1+\frac{\partial(\delta x_i)}{\partial x_i} \\ &= 1+\mathrm{div}(\delta\mathbf{r}) \ . \end{aligned} \tag{7.4.29}$$

U prethodnom izvodjenju koristili smo činjenicu da su varijacije δx_i infinitezimalno male. Dakle

$$\mathrm{d}V' = (1+\mathrm{div}(d\mathbf{r}))\mathrm{d}V \ . \tag{7.4.30}$$

Zakon održanja naelektrisanja

$$\rho'(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})dV' = \rho(\mathbf{r})dV \tag{7.4.31}$$

daje

$$\rho'(\mathbf{r}') = (1-\mathrm{div}(\delta\mathbf{r}))\rho(\mathbf{r}) \ . \tag{7.4.32}$$

Veličina

$$\delta_T\rho(\mathbf{r}) = \rho'(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-\rho(\mathbf{r}) \tag{7.4.33}$$

predstavlja razliku gustine naelektrisanja nakon virtuelnog pomeranja dielektrika u novoj tački $\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$ i gustine naelektrisanja u polaznoj tački $\mathbf{r}$. Ova veličina se naziva totalnom varijacijom gustine naelektrisanja. Dobijamo

$$\delta_T\rho(\mathbf{r}) = -\rho\mathrm{div}(\delta\mathbf{r}) \ . \tag{7.4.34}$$

Promena

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \rho'(\mathbf{r})-\rho(\mathbf{r}) \tag{7.4.35}$$

se naziva varijacijom forme gustine naelektrisanja ili lokalnom varijacijom. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \delta_T\rho(\mathbf{r}) &= \rho'(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-\rho(\mathbf{r}) \\ &= \rho'(\mathbf{r})+\delta\mathbf{r}\cdot\bigtriangledown\rho(\mathbf{r})-\rho(\mathbf{r}) \\ &= \delta\rho(\mathbf{r})+\delta\mathbf{r}\cdot\bigtriangledown\rho(\mathbf{r}) \ . \end{aligned} \tag{7.4.36}$$

Ovo je veza izmedju varijacije forme i totalne varijacije. Lokalna promena gustine naelektrisanja je

$$\delta\rho = -\mathrm{div}(\rho\delta\mathbf{r}) \ . \tag{7.4.37}$$

Potpuno analogno se nalaze totalna i lokalna varijacija gustine mase supstance

$$\begin{aligned} \delta_T\rho_m(\mathbf{r}) &= -\rho_m\mathrm{div}(\delta\mathbf{r}) \\ \delta\rho_m &= -\mathrm{div}(\rho_m\delta\mathbf{r}) \ . \end{aligned} \tag{7.4.38}$$

Enerija polja u dielektriku može da se napiše na dva ekvivalentna načina: Prvi je

$$W' = \frac{1}{2}\int_V d^3r\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} \ , \tag{7.4.39}$$

a drugi

$$W'' = \frac{1}{2}\int_V d^3r\phi\rho \; . \tag{7.4.40}$$

Variraćemo oba izraza za energiju polja. Variranjem prvog dobijamo

$$\begin{aligned} \delta W' &= \frac{1}{2}\delta\int_V \mathrm{d}^3r\epsilon_0\epsilon(\bigtriangledown\phi)^2 \\ &= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\epsilon_0\delta\epsilon(\bigtriangledown\phi)^2 + 2\epsilon_0\epsilon(\bigtriangledown\phi)\cdot\delta(\bigtriangledown\phi)\Big) \; . \end{aligned} \tag{7.4.41}$$

Korišćenjem $\mathbf{D} = -\epsilon_0\epsilon \bigtriangledown \phi$ i

$$\mathrm{div}(\mathbf{D}\delta\phi) = \rho\delta\phi + \mathbf{D}\cdot\bigtriangledown\phi$$

imamo

$$\begin{aligned} \delta W' &= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\epsilon_0\delta\epsilon(\bigtriangledown\phi)^2 - 2\mathbf{D}\cdot\nabla\delta\phi\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\epsilon_0\delta\epsilon\mathbf{E}^2 + 2\rho\delta\phi\Big) - \oint_{\partial V}\mathrm{d}\mathbf{S}\cdot\mathbf{D}\delta\phi \; . \end{aligned}$$

Površinski integral u zadnjem izrazu je jednak nuli, pa je

$$\delta W' = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\epsilon_0\delta\epsilon\mathbf{E}^2 + 2\rho\delta\phi\Big) \; . \tag{7.4.42}$$

Sa druge strane variranjem drugog izaraza za energiju polja imamo

$$\delta W'' = \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3r\Big(\rho\delta\phi + \phi\delta\rho\Big) \; . \tag{7.4.43}$$

Kombinujući ova dva izraza imamo

$$\delta W = 2\delta W'' - \delta W' = \int_V \mathrm{d}^3r\Big(\phi\delta\rho - \frac{1}{2}\epsilon_0\mathbf{E}^2\delta\epsilon\Big) \; . \tag{7.4.44}$$

Kod gasova i tečnosti dielektrična propustljivost je funkcija gustine supstance, $\epsilon = \epsilon(\rho_m(\mathbf{r}))$. Totalna varijacija dielektrične propustljivosti uslovljena je promenom gustine supstance, tj.

$$\delta_T\epsilon = \epsilon(\rho'_m(\mathbf{r}')) - \epsilon(\rho_m(\mathbf{r})) = \frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_m}\delta_T\rho_m(\mathbf{r}) = -\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_m}\rho_m\mathrm{div}(\delta\mathbf{r}) \; . \tag{7.4.45}$$

Zamenom (7.4.37) i (7.4.45) u (7.4.44) dobijamo

$$\delta W = \int_V \mathrm{d}^3r\Big(-\rho\mathbf{E} - \frac{1}{2}\nabla\Big(\epsilon_0\mathbf{E}^2\rho_m\frac{\partial\epsilon}{\partial\rho_m}\Big) + \frac{1}{2}\mathbf{E}^2\nabla\epsilon\Big)\cdot\delta\mathbf{r} \tag{7.4.46}$$

Zapreminska gustina sile, $\mathbf{f}$ koja deluje na dielektrik se dobija iz

$$\delta W = -\int_V \mathrm{d}^3r\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{r} \; . \tag{7.4.47}$$

Prema tome, sila koja deluje na dielektrik je

$$\mathbf{F} = \int_V \mathrm{d}^3 r \Big(\rho \mathbf{E} - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \nabla \epsilon + \frac{1}{2} \nabla \Big(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 \rho_m \frac{\partial \epsilon}{\partial \rho_m} \Big) \Big) \ . \tag{7.4.48}$$

Prvi član u (7.4.48) je sila koja deluje na spolja uneta naelektrisanja u dielektriku. Drugi član je posledica nehomogenosti dielektrične konstante. Poslednji član je tzv. elektrostrikcioni član. On je posledica nehomogenosti električnog polja. U njemu se pojavljuje zavisnost propustljivosti od gustine dielektrika. Ovaj član posle integracije po konačnoj oblasti je jednak nuli. Prva dva člana se mogu prepisati preko Maksvelovog tenzora napona.

Glava 8

Magnetostatičko polje u vakuumu

Osnovne zakone magnetostatike smo izložili u poglavlju 2.2, tako da je ova glava nastavak tog poglavlja. Vektorski potencijal magnetostatičkog polja zadovoljava Poasonovu jednačinu. Sve osobine Poasonove i Laplasove jednačine diskutovane u glavi 6 važe i za magnetostatičko polje. Najveći deo ove glave posvećen je energetskim odnosima u magnetostatičkom polju.

8.1 Osnovne jednačine

Magnetostatičko polje generišu naelektrisanja u stacionarnom kretanju. Gustine naelektrisanja i struje kod stacionarnog kretanja ne zavise od vremena: $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r})$ i važi $\mathrm{div}\mathbf{j} = 0$. Maksvelove jednačine za magnetno polje su u ovom slučaju dekuplovane od jednačina za električno polje. Magnetostatičko polje zadovoljava

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{B} &= \mu_0\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Magnetostatičko polje je solenoidno pa ga možemo predstaviti u obliku $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$. Iz identiteta $rotgrad = 0$ zaključujemo da je vektorski potencijal nejednoznačan, tj. možemo mu dodati gradijent neke funkcije

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} - \nabla f(\mathbf{r}) \ . \tag{8.1.2}$$

Ova nejednoznačnost je specijalan slučaj gradijentnih transformacija. Zamenom $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ u Amperovu teoremu (8.1.1) dobijamo

$$\nabla\mathrm{div}\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A} = \mu_0\mathbf{j} \ . \tag{8.1.3}$$

U Kulonovoj kalibraciji potencijala, $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ ova jednačina postaje

$$\triangle\mathbf{A} = -\mu_0\mathbf{j} \ , \tag{8.1.4}$$

što je vektorska Poasonova jednačina koju smo detaljno analizirali u prethodnim poglavljima. Na površinama na kojima postoje površinske struje čiju gustinu obeležavamo sa $\mathbf{i}$, normalna komponenta magnetne indukcije i tangencijalna komponenta jačine magnetnog polja zadovoljavaju sledeće granične uslove

$$\begin{aligned} B_{2n} - B_{1n} &= 0 \ , \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{i} \ . \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

8.2 Energetski odnosi u magnetostatičkom polju

Energija magnetostatičkog polja u vakuumu u oblasti V je

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}^2 \ . \tag{8.2.6}$$

Primenom $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ i vektorskotg identiteta (A.0.5) dobijamo

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \Big(\mathrm{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{B} \Big) \\ &= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\partial V} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \ . \end{aligned} \tag{8.2.7}$$

Neka su stacionarne struje lokalizovane u ograničenom delu prostora, i neka je oblast u kojoj odredjujemo energiju magnetnog polja $V = R^3$. U ovom slučaju površinski integral u poslednjem redu u (8.2.7) jednak je nuli, pa je energija magnetostatičkog polja data sa

$$W = \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \ . \tag{8.2.8}$$

Jasno je da se u (8.2.8) integrali po oblasti prostora gde je $\mathbf{j} \neq 0$. Zamenom izraza za vektorski potencijal (2.2.52) u (8.2.8) dobijamo

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \int_V \mathrm{d}^3 r \mathrm{d}^3 r' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \ . \tag{8.2.9}$$

Izrazi (8.2.8) i (8.2.9) predstavljaju sopstvenu energiju magnetnog polja generisanog zapreminskom gustinom struje $\mathbf{j}(\mathbf{r})$. U njima je prisutan faktor 1/2 zbog toga što se pri integraciji energija interakcije svakog para računa dva puta.

Sada ćemo razmotriti interakciju dve stacionarne raspodele gustina struje. One generišu magnetna polja $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ odnosno $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$. Ukupna energija magnetnog polja je

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}_1^2 + \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}_2^2 + \frac{1}{\mu_0} \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \ . \tag{8.2.10}$$

Prva dva člana su sopstvene energije prve odnosno druge raspodele. Energija interakcije je

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{1}{\mu_0} \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \ . \tag{8.2.11}$$

Dalje možemo da magnetno polje prve raspodele $\mathbf{B}_1$ izrazimo kao $\mathbf{B}_1 = \mathrm{rot}\mathbf{A}_1$, gde je $\mathbf{A}_1$ vektorski potencijal prve raspodele i da primenimo formulu (A.0.5). Tako dolazimo do

$$W_{\mathrm{int}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{j}_2 \ , \tag{8.2.12}$$

uz odgovarajuću pretpostavku o ponašanju polja i potencijala u beskonačnosti. $\mathbf{A}_1$ je vektorski potencijal koga generiše raspodela gustine struje $\mathbf{j}_1$. Analogno se može pokazati da je energija interakcije

$$W_{\mathrm{int}} = \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{j}_1 \ . \tag{8.2.13}$$

Ova formula ima drugačiju interpretaciju. To je energija interakcije prve raspodele sa spoljašnjim potencijalom $\mathbf{A}_2$. Ova dva izraza za energiju interakcije su jednaka i mogu se prepisati u obliku

$$W_{\mathrm{int}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_1} \int_{V_2} \mathrm{d}^3 r_1 \mathrm{d}^3 r_2 \frac{\mathbf{j}_1(\mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{j}_2(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \ , \tag{8.2.14}$$

primenom izraza za vektorski potencijal (2.2.52).

Neka se struja gustine $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ nalazi u spoljašnjem magnetnom polju čiji je vektorski potencijal $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ poznat. Ako pretpostavimo da se unutar oblasti prostora koju zauzima struja spoljašnje polje malo menja onda možemo potencijal razviti u red oko neke tačke O unutar ove oblasti. To znači da je izvor koji generiše polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ daleko od oblasti prostora u kojoj se nalaze stacionarne struje. Energija interakcije je

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{int}} &= \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \\ &= \int_V \mathrm{d}^3 r \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \Big(\mathbf{A}(0) + x_i \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\Big|_0 + \dots \Big) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\Big|_0 \cdot \int \mathrm{d}^3 r (x_i \mathbf{j} + x_i \mathbf{j}) + \dots \ . \end{aligned} \tag{8.2.15}$$

Najniži (monopolni) član je jednak nuli. Primenom (2.2.71) dobijamo

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{int}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\Big|_0 \cdot \int \mathrm{d}^3 r ((\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\Big|_0 \cdot \int \mathrm{d}^3 r (\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{m} \cdot (\mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i}\Big|_0) \ . \end{aligned} \tag{8.2.16}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \mathbf{m} \cdot (\mathbf{e}_i \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_\iota}\Big|_0) &= m_k \epsilon_{kil} \frac{\partial A_l}{\partial x_i}\Big|_0 \\ &= m_k (\mathrm{rot}\mathbf{A})_k(0) = m_k B_k(0) \\ &= \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(0) \ . \end{aligned} \tag{8.2.17}$$

Dakle, u najnižem redu energija interakcije sistema stacionarnih struja sa spoljnjim magnetostatičkim poljem je $W_{\rm int} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(0)$. Ovo je dipolni član, tj. on predstavlja energiju interakcije magnetnog dipola sa spoljnjim poljem. Više članove nećemo računati.

Silu kojom spoljne magnetostatičko polje deluje na sistem stacionarnih struja možemo takodje razviti u red po multipolima. Opet ćemo računati do dipolnog člana. Tražena sila je

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \int \mathrm{d}^3 r (\mathbf{j}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \\
&= \int \mathrm{d}^3 r \mathbf{j} \times \mathbf{B}(0) + \int \mathrm{d}^3 r x_i \mathbf{j} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\Big|_0 \, .
\end{aligned}
\tag{8.2.18}
$$

Prvi član je jednak nuli, a drugi ćemo transformisati prema

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F} &= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r [(\mathbf{r} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{e}_i] \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\Big|_0 \\
&= (\mathbf{m} \times \mathbf{e}_i) \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\Big|_0 \\
&= \Big(\mathbf{m} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\Big|_0\Big)\mathbf{e}_i - \Big(\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}\Big|_0\Big)\mathbf{m} \\
&= \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})\Big|_0 - \mathrm{div}\mathbf{B}(0)\mathbf{m} \\
&= (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}\Big|_0 \, .
\end{aligned}
\tag{8.2.19}
$$

Primenili smo vektorski identitet (A.0.6), činjenicu da je magnetni dipolni moment sistema konstantan i da je $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$.

Energija električnog dipola u spoljnjem električnom polju je $W_{\rm int} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, a sila koja deluje na dipol je $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} = -\nabla W_{\rm int}$. Elektrostatička sila je konzervativna, tako da je $W_{\rm int}$ potencijalna energija. Magnetostatička sila nije konzervativna. To se vidi i na primeru magnetnog dipola u spoljnem magnetnom polju. Energija interakcije dipola sa poljem je $W_{\rm int} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$; primećujemo da nema znaka minus u ovom izrazu. Sila kojom spoljašnje magnetno polje deluje na magnetni dipol je $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}$ i ne važi $\mathbf{F} = -\nabla W_{\rm int}$. Za tačkasti električni dipol (npr. atom) u električnom polju Hamiltonijan je $H = T - \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$, gde je T kinetička energija. Ovaj Hamiltonijan ima oblik $H = T + U$, jer je sistem konzervativan. Hamiltonijan magnetnog dipola u spoljnem polju je $H = T - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$. Drugi sabirak u Hamiltonijanu nije energija magnetnog dipola jer ima suprotan znak. Medjutim, član $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ je generalisana potencijalna energija (često se naziva i potencijalnom energijom), ali treba imati na umu da to nije energija interakcije magnetnog dipola sa spoljašnjim poljem. Iz (generalisano) potencijalne energije $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ dobija se korektan izraz za silu koja deluje na magnetni dipol.

8.3 Magnetostatička energija sistema provodnika sa strujom

Posmatrajmo sistem od N masivnih provodnika sa stalnim strujama. Magnetna energija sistema ovih provodnika je

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^3 r \mathbf{A}\cdot\mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\sum_{i,k=1}^{N}\int_{V_i}\int_{V_k}\mathrm{d}^3\mathbf{r}_i \mathrm{d}^3\mathbf{r}'_k \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'_k)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_k|} \ . \end{aligned} \tag{8.3.20}$$

Sa V_i smo obeležili zapreminu $i-$tog provodnika. Gornju dvostruku sumu napisaćemo kao zbir članova kod kojih je $i = k$ i $i \neq k$

$$W = \sum_{i=1}^{N} W_{ii} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq k} W_{ik} \ . \tag{8.3.21}$$

Sabirci

$$W_{ii} = \frac{\mu_0}{8\pi}\int_{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3 r_i \mathrm{d}^3 r'_i \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_i|} \tag{8.3.22}$$

predstavljaju sopstvenu energiju magnetnog polja $i-$tog provodnika. Energija interakcije $i-$tog i $k-$tog provodnika ($i \neq k$) data je sa

$$W_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_i}\int_{V_k}\mathrm{d}^3 r_i \mathrm{d}^3 r'_k \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'_k)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_k|} \ . \tag{8.3.23}$$

Sopstvena magnetna energija $i-$tog provodnika, (8.3.22) je proporcionalna sa kvadratom jačinom struje I_i koja protiče kroz provodnik

$$W_{ii} = \frac{1}{2}L_{ii}I_i^2 \ . \tag{8.3.24}$$

Koeficijenti proporcionalnosti, L_{ii} se nazivaju koeficijentima samoindukcije i dati su sa

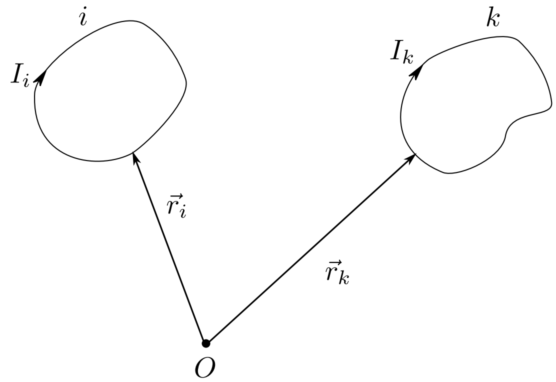
$$L_{ii} = \frac{2W_{ii}}{I_i^2} = \frac{1}{I_i^2}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_i}\int_{V_i}\mathrm{d}^3 r_i \mathrm{d}^3 r'_i \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}'_i|} \ . \tag{8.3.25}$$

Energija interakcije para provodnika je proporcionalna sa jačinama struja u tim provodnicima, tj.

$$W_{ik} = L_{ik}I_i I_k \ . \tag{8.3.26}$$

Koeficijent L_{ik} je koeficijent medjusobne indukcije $i-$tog i $k-$tog provodnika. Očigledno je da su oni dati sa

$$L_{ik} = \frac{W_{ik}}{I_i I_k} = \frac{1}{I_i I_k}\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V_i}\int_{V_k}\mathrm{d}V_i \mathrm{d}V_k \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}_k)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_k|} \ . \tag{8.3.27}$$



Slika 8.1:

Ako provodnici imaju zanemarljiv poprečni presek (tanke žice) onda ćemo zapreminske integrale u gornjim izrazima zameniti linijskim, tj. $\mathbf{j}\mathrm{d}V \to I\mathrm{d}\mathbf{r}$. U tom slučaju (slika 8.1) energija interakcije $i-$tog i $k-$tog provodnika je

$$W_{ik} = I_i I_k \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_k}|} = L_{ik} I_i I_k \ , \tag{8.3.28}$$

gde su I_i i I_k jačine struje u $i-$tom, odnosno $k-$tom provodnik; C_i je kontura $i-$tog provodnika. Koeficijenti medjusobne indukcije za tanke provodnike je onda odredjena sa

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_k} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r_k}|} \ . \tag{8.3.29}$$

Koeficijenti medjusobne indukcije zavise od oblika, veličine i relativnog odnosa dva provodnika. Za tanke provodnike koeficijenti samoindukcije su odredjeni sa

$$L_{ii} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_i} \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}_i \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}'_i}{|\mathbf{r_i} - \mathbf{r'_i}|} \ . \tag{8.3.30}$$

Ovaj integral divergira što je posledica činjenice da smo zanemariti poprečni presek provodnika. Zato koeficijente samoindukcije treba da odredjujemo primenom (8.3.25).

Ukupnu energiju magnetnog polja sitema provodnika možemo izraziti preko koeficijenata samoindukcije i medjusobne indukcije prema

$$\begin{aligned} W &= \sum_i W_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} W_{ik} \\ &= \frac{1}{2} \sum_i L_{ii} I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq k} L_{ik} I_i I_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k \ . \end{aligned} \tag{8.3.31}$$

Magnetna energija je pozitivna kvadratna forma jačina struja pa mora važiti uslov

$$L_{ii}L_{kk} > L_{ik}^2 \ . \tag{8.3.32}$$

Koeficijente samoidukcije i medjusobne indukcije tankih provodnika povezaćemo sa fluksom magnetnog polja. U izrazu za energiju magnetnog polja takvih sistema zapreminske integrale zamenjujemo sa linijskim pa je

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\int \mathbf{A}\cdot\mathbf{j}\mathrm{d}^3r \\ &\to \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \oint_{C_i} \mathbf{A}(\mathbf{r}_i)\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i \int_{S_i} \mathbf{B}_i\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} I_i\Phi_i \ . \end{aligned} \tag{8.3.33}$$

U prethodnoj formuli primenili smo Stoksovu teoremu; $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{B}_i$ su vektorski potencijal i magnetno polje od svih provodnika u tački $\mathbf{r}_i$. Površ čija je granica i-ti provodnik obeležili smo sa S_i. Fluks magnetnog polja kroz $i-$ti provodnik je Φ_i. Poredjenjem (8.3.31) i (8.3.33) vidimo da je fluks magnetnog polja kroz i-ti provodnik linearna kombinacija jačina struja u provodnicima

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^{N} L_{ik}I_k \ . \tag{8.3.34}$$

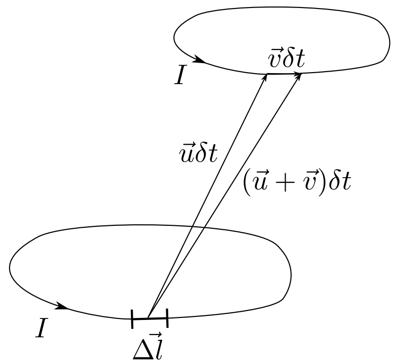
Ova formula daje jasniji smisao keoficijentima samoindukcije i medjusobne indukcije. Koeficijent medjusobne indukcije $L_{ik}, i \neq k$ govori o tome koji deo polja (odnosno koji deo 'magnetnih linija') $k-$tog provodnika prolazi kroz površinu nategnutu na $i-$ti provodnik. Slično je i sa koeficijentima samoindukcije.

8.4 Rad na premeštanju strujne konture u spoljnjem polju

Posmatrajmo provodnu konturu sa stalnom strujom I koja se kreće, brzinom $\mathbf{u}$ u spoljnjem magnetnom polju, slika 8.2. Brzina elektrona u odnosu na provodnik je $\mathbf{v}$. Jačina struje u provodniku je $I = nSev$, gde je n koncentracija elektrona u provodniku, S površina poprečnog preseka provodnika. Sila kojom magnetno polje deluje na elektrone u segmentu provodnika dužine Δl je

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F} &= enS\Delta l(\mathbf{v}+\mathbf{u})\times\mathbf{B} \\ &= I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B} + nSe\Delta l\mathbf{u}\times\mathbf{B} \ . \end{aligned} \tag{8.4.35}$$

Prvi sabirak je Amperova sila, dok se drugi može prepisati u obliku $I\Delta l(\mathbf{u}\times\mathbf{B})/v$. Rad magnetne



Slika 8.2:

sile na pomeranju strujnog segmenta $I\Delta l$ za $\delta\mathbf{r} = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\delta t$ je

$$\begin{aligned}
\delta A_m &= \Delta\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{r} \\
&= (I\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{u}\delta t + \frac{I}{v}\Delta l(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v}\delta t \\
&= I(\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{B})\cdot\delta\mathbf{x} + I\Delta l\mathbf{B}\cdot(\frac{\mathbf{v}}{v}\times\delta\mathbf{x}) \;, \qquad (8.4.36)
\end{aligned}$$

gde je $\delta\mathbf{x} = \mathbf{u}\delta t$. Prvi sabirak u (8.4.36) je rad Amperove sile; možemo ga prepisati u obliku $-I\delta\Phi_{\mathrm{om}}$, gde je $\delta\Phi_{\mathrm{om}}$ fluks magnetnog polja kroz omotač tela koje nastaje pri kretanju konture za vreme δt. Iz druge Maksvelove jednačine sledi $\delta\Phi_{\mathrm{om}} = \Phi_1 - \Phi_2 = -\delta\Phi$ pa je rad Amperove sile dat sa $I\delta\Phi$. Drugi sabirak u (8.4.36) je $-I\delta\Phi$. Rezultat je očekivan. Rad magnetnog polja je jednak nuli.

Da bi u provodniku tekla stalna struja I moramo imati izvor EMS koji održava struju konstantnom. Rad izvora elektromotorne sile $\mathcal{E}$ na održavanju struje je

$$\delta A_{\mathrm{ext}} = -I\mathcal{E}\delta t = I\delta\Phi. \qquad (8.4.37)$$

Dakle ukupni rad pri premeštanju provodnika je

$$\delta A = \delta A_m + \delta A_{\mathrm{ext}} = I\delta\Phi - I\delta\Phi + I\delta\Phi = I\delta\Phi \;. \qquad (8.4.38)$$

Elektrostatičko polje je konzervativno dok magnetostatičko to nije. Pri formiranju sistema nepokretnih naelektrisanja ulažemo energiju da samo polako dovedemo naelektrisanja iz beskonačnosti u zadatu konfiguraciju. Medjutim da bismo formirali sistem stacionarnih struja moramo dovoditi iz beskonačnosti strujni element za strujnim elementom ali i vršiti rad na očuvanju struja. To je bitna razlika izmedju jednog i drugog slučaja.

Glava 9

Magnetici u konstantnom magnetnom polju

U ovoj glavi proučavaćemo magnetostatičko polje u prisustvu sredina. U tri zasebna poglavlja izučavaćemo dijamagnetizam, paramagnetizam i feromagnetizam.

9.1 Osnovne veličine

Supstancijalna jednačina za linearni magnetik koji se nalazi u konstantnom magnetnom polju je $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0\mu\mathbf{H}$, gde je μ relativna magnetna permeabilnost sredine. Veza izmedju magnetizacije i jačine magnetnog polja je

$$\mathbf{M} = (\mu - 1)\mathbf{H} = \chi_m\mathbf{H} \ , \tag{9.1.1}$$

gde je χ_m magnetna susceptibilnost. Eliminisanjem jačine magnetnog polja preko magnetne indukcije dobijamo

$$\mathbf{M} = \frac{1}{\mu_0}\Big(1 - \frac{1}{\mu}\Big)\mathbf{B} = \frac{\chi_m}{\mu_0(1 + \chi_m)}\mathbf{B} \ . \tag{9.1.2}$$

Postoje dva efekta koja uzrokuju magnetizovanja sredina. Jedan je indukcioni efekat i za njega je odgovorna Larmorova precesija. Drugi je orjentaciono magnetizovanje. Ove efekte ćemo razmatrati u naredna dva poglavlja.

9.2 Dijamagnetizam

Dijamagnetici su materijali čija je magnetna susceptibilnost vrlo mala i negativna. Drugim rečima magnetizacija dijamagnetnoih sredina je suprotno usmerena od magnetnog polja.

9.2.1 Larmorova precesija

Magnetni dipolni moment atoma (molekula) je

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} q \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{v}_\alpha = \frac{q}{2m} \sum_{\alpha} \mathbf{r}_\alpha \times m\mathbf{v}_\alpha = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \ , \tag{9.2.3}$$

gde su $q = -e$ i m naelektrisanje odnosno masa elektrona. Sumiranje u prethodnoj formuli se vrši po elektronima atoma odnosno molekula. Vidimo da je magnetni moment molekula proporcionalan sa momentom impulsa molekula $\mathbf{L}$. Moment sile koji deluje na molekul koji se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju je $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, pa po teorema momenta impulsa imamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \times \mathbf{B}. \tag{9.2.4}$$

Ako uvedemo tzv. Larmorovu frekvencu sa

$$\boldsymbol{\omega}_L = -\frac{q}{2m} \mathbf{B}$$

ova jednačina postaje

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t} - \boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{L} = 0 \ . \tag{9.2.5}$$

Jednačina (9.2.5) je Ojlerova jednačina rotacionog kretanja krutog tela oko nepokretne tačke. Izaberimo da je magnetno polje usmereno duž $z-$ose, tj. $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_3$. Dekartove projekcije jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t} + \omega_L L_2 &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t} - \omega_L L_1 &= 0 \\ \frac{\mathrm{d}L_3}{\mathrm{d}t} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{9.2.6}$$

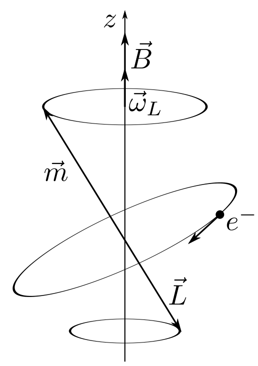
Rešenje gornjeg sistema diferencijalnih jednačina je

$$L_1 = A\cos(\omega_L t + \gamma), \ L_2 = A\sin(\omega_L t + \gamma), \ L_3 = C \ , \tag{9.2.7}$$

gde su A, C i γ konstante. Iz ovog rešenja vidimo da vektori magnetnog momenta i momenta impulsa precesiraju oko vektora magnetnog polja ugaonom brzinom ω_L. Ovo dopunsko kretanje uzrokovano prisustvom spoljašnjeg magnetnog polja naziva Larmorovom precesijom i ono dovodi do pojave indukovanog magnetnog dipolnog momenta. Na slici 9.1 predstavili smo precesiranje magnetnog momenta i momenta impulsa elektrona oko spoljnjeg magnetnog polja.

9.2.2 Dijamagnetski efekat

Magnetizam materijala je u osnovi kvantno mehanički fenomen. Naime, zakoni klasične fizike ne mogu da opišu magnetizam sredine. Ovaj iskaz je sadržaj Bor-van Levenove teoreme koja kaže



Slika 9.1: Precesija momenta impulsa i dipolnog momenta elektrona u spoljašnjem magnetnom polju.

da je magnetni moment ravnotežne sredine kod koje se naelektrisane čestice kreću u magnetnom polju po stacionarnim trajektorijama identički jednak nuli. Dokaz je jednostavan. Particiona funkcija (statistička suma) opisanog klasičnog sistema je

$$Z = \int d^3r_1 d^3P_1 \dots d^3r_N d^3P_N e^{-\beta\left(\sum_\alpha \frac{(\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha))^2}{2m} + V_\alpha\right)}$$

Sa V_α smo obeležili potencijal u kome se nalazi elektron indeksa α. Veličina $\beta = (kT)^{-1}$ je inverzna temperatura. Smenom

$$\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}(\mathbf{r}_\alpha) \to \mathbf{P}_\alpha$$

u statističkoj sumi Z vidimo da ona ne zavisi od magnetnog polja. To znači da je magnetizacija sredine, koja je izvod slobodne energije $F = -kT \ln Z$ po polju pri konstantnoj temperaturi

$$M = -\frac{\partial F}{\partial B}\Big|_T$$

jednaka nuli.

Dakle, da bismo opisali magnetizam sredine moramo uključiti kvantnu mehaniku. Poći ćemo od izraza za hamiltonijan atoma koji se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju (vidi (5.6.51))

$$H = \sum_{\alpha=1}^{Z} \left(\frac{(\mathbf{P}_\alpha - q_\alpha \mathbf{A}_\alpha)^2}{2m} + V_\alpha \right) - \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B} \ . \tag{9.2.8}$$

Sumiranje se vrši po elektronima u molekulu, pa je $q_\alpha = -e$. Sa $\mathbf{P}_\alpha$ je obeležen kanonski impuls elektrona indeksa α. Drugi sabirak u (9.2.8) je kvantno mehanička interakcija spinskog magnetnog momenta atoma, $\mathbf{m}_s$ sa spoljnjim poljem[1]. Obratite pažnju na znak ovog člana.

[1]Za elektron spinski magnetni moment je

$$\mathbf{m}_s = -g\frac{e}{2m}\mathbf{S} \ ,$$

Vektorski potencijal konstantnog magnetnog polja na mestu gde se nalazi elektron indeksa α je $\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_\alpha)$ pa za hamiltonijan dobijamo

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\alpha=1}^{Z}\Big(\frac{1}{2m}(\mathbf{P}_\alpha - \frac{q}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_\alpha))^2 + V_\alpha\Big) - \mathbf{m}_s\cdot\mathbf{B} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{Z}\Big(\frac{\mathbf{P}_\alpha^2}{2m} + V_\alpha + \frac{q^2}{8m}(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_\alpha)^2 - \frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}_\alpha)\Big) - \mathbf{m}_s\cdot\mathbf{B}\ . \end{aligned} \tag{9.2.9}$$

Prvi i drugi član u izrazu za hamiltonijan su neperturbisani hamiltonijan; preostali sabirci su perturbacija. Četvrti sabirak u ovom izrazu sadrži ukupni orbitalni moment atoma

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha=1}^{Z}\frac{1}{m}\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}_\alpha\ .$$

Prema tome ovaj sabirak

$$-\sum_{\alpha=1}^{Z}\frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}_\alpha) = -\frac{q}{2m}\mathbf{L}\cdot\mathbf{B} = -\mathbf{m}_l\cdot\mathbf{B} \tag{9.2.10}$$

je proporcionalan ukupnom orbitalnom magnetnom momentu atoma $\mathbf{m}_l$.

Magnetni moment je definisan kao negativna varijacija hamiltonijana po spoljnem magnetnom polju,

$$\mathbf{m} = -\frac{\delta H}{\delta\mathbf{B}}\ .$$

Pri infinitezimalnoj promeni spoljašnjeg magnetnog polja, $\mathbf{B}\to\mathbf{B}+\delta\mathbf{B}$, varijacija hamiltonijana je

$$\delta H = \frac{q^2}{4m}\sum_{\alpha=1}^{Z}\Big(\mathbf{r}_\alpha\times(\mathbf{B}\times\mathbf{r}_\alpha)\Big)\cdot\delta\mathbf{B} - (\mathbf{m}_l+\mathbf{m}_s)\cdot\delta\mathbf{B}\ . \tag{9.2.11}$$

Iz ovog izraza dobijamo da je magnetni moment molekula dat sa

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_{\text{ind}}\ . \tag{9.2.12}$$

Prvi član

$$\mathbf{m}_0 = -\sum_{\alpha=1}^{Z}\frac{e}{2m}(\mathbf{r}_\alpha\times\mathbf{P}_\alpha) + \mathbf{m}_s \tag{9.2.13}$$

---

gde je $g = 2,002$ žiromagnetski odnos, a $\mathbf{S} = \frac{\hbar\boldsymbol{\sigma}}{2}$ operator spina elektrona. Veličina

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,2745\cdot 10^{-24}\mathrm{Am}^2$$

je Borov magneton, pa je $\mathbf{m}_s = -\mu_B\boldsymbol{\sigma}$. Zanimljivo je da odnos izmedju magnetnog momenta i momenta impulsa nije isti u klasičnoj i kvantnoj fizici. Naime koeficijent proporcionalnosti izmedju $\mathbf{m}_s$ i spina $\mathbf{S}$ je približno duplo veći nego odgovarajući koeficijent proporcionalnosti izmedju $\mathbf{m}$ i momenta impulsa $\mathbf{L}$.

je unutrašnji magnetni dipolni moment molekula (zbir orbitalnog i spinskog magnetnog momenta). Možemo ga prepisati preko ukupnog orbitalnog i spinskog momenta atoma

$$\mathbf{m}_0 = -\frac{e}{2m}(\mathbf{L} + g\mathbf{S}) \ ,$$

gde je g efektivni žiromagnretni odnos atoma. Drugi član je indukovani magnetni dipolni moment

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Z} q\mathbf{r}_\alpha \times (\boldsymbol{\omega}_L \times \mathbf{r}_\alpha) \ . \tag{9.2.14}$$

Kao što smo već rekli magnetni dipolni moment atoma se indukuje zahvaljujući Larmorovoj precesiji. Razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda indukovani magnetni moment postaje

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{Z} q(\mathbf{r}_\alpha^2\boldsymbol{\omega}_L - (\mathbf{r}_\alpha \cdot \boldsymbol{\omega}_L)\mathbf{r}_\alpha) \ . \tag{9.2.15}$$

Za magnetno polje usmereno duž $z-$ ose, indukovani magnetni moment je

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = \frac{e^2 B}{4m}\sum_{\alpha=1}^{Z}\Big(- z_\alpha x_\alpha \mathbf{e}_1 - z_\alpha y_a \mathbf{e}_2 + (x_\alpha^2 + y_\alpha^2)\mathbf{e}_3\Big) \ .$$

Pretpostavimo da se atom nalazi u osnovnom stanju $|0\rangle$ koje je sfernosimetrično. Očekivana vrednost indukovanog momenta u ovom stanju je

$$\langle \mathbf{m}_{\text{ind}} \rangle = \frac{e^2}{4m}\sum_{\alpha=1}^{Z} \langle x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \rangle \mathbf{B} \ ,$$

jer zbog sferne simetrije imamo $\langle x_\alpha z_\alpha \rangle = \langle y_\alpha z_\alpha \rangle = 0$. Takodje, zbog sferne simetrije je

$$\langle x_\alpha^2 \rangle = \langle y_\alpha^2 \rangle = \frac{2}{3}\langle r_\alpha^2 \rangle \ .$$

Prema tome, za sferno simetrične atome očekivana vrednost indukovanog momenta postaje

$$\mathbf{m}_{\text{ind}} = -\frac{Ze^2}{6m}\mathbf{B}\langle \sum_{\alpha=1}^{Z} r_\alpha^2 \rangle \ . \tag{9.2.16}$$

Odmah vidimo da je indukovani magnetni moment kolinearan, ali suprotno usmeren od magnetnog polja. To znači da je magnetna susceptibilnost negativna, a magnetna relativna permeabilnost manja od 1. Ovo se naziva dijamagnetskim efektom; magnetici kod kojih je to dominantan efekat magnetizacije su dijamagnetici.

Ako sa n obeležimo koncentraciju molekula, magnetizacija dijamagnetika je data sa

$$\mathbf{M} = n\mathbf{m}_{\text{ind}} = -\frac{Ze^2 \langle r^2 \rangle n}{6m}\mathbf{B}. \tag{9.2.17}$$

Iz ovog izraza dobijamo relativnu magnetna permeabilnost

$$\mu = \frac{1}{1+\mu_0 \frac{Ze^2 \langle r^2 \rangle n}{6m}} \approx 1 - \frac{Ze^2 \mu_0 \langle r^2 \rangle n}{6m} \ . \tag{9.2.18}$$

Poslednji rezultat je poznat kao Lanžven-Paulijeva formula. Veličina

$$\chi_m = -\frac{Ze^2 \mu_0 \langle r^2 \rangle n}{6m}$$

je magnetna susceptibilnost. Dakle, za dijamagnetike relativna magnetna permeabilnost oko 1, ali je manja od 1.

9.3 Paramagnetizam

Paramagnetici su linearni magnetici kod kojih molekuli imaju sopstveni magnetni moment, pa je dijamagnetski efekat zanemarljiv. Sopstveni magnetni moment molekula ćemo obeležiti sa $\mathbf{m}_0$. Hamiltonijan molekula u spoljnem magnetnom polju $\mathbf{B}$ je

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} - \mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{B} \ , \tag{9.3.19}$$

gde smo dijamagnetni član zanemarili. Srednja vrednost magnetnog dipolnog momenta molekula računa se analogno sa orjentacionim polarizovanjem dielektrika. Rezultat je

$$\langle \mathbf{m} \rangle = m_0 L\Big(\frac{m_0 B}{kT}\Big)\mathbf{e}_3 \ , \tag{9.3.20}$$

gde smo uzeli da je magnetno polje usmereno duž $z-$ ose. Veza izmedju srednje vrednosti magnetnog momenta i magnetnog polja je nelinearna. U slabim poljima i/ili na visokim temperaturama ova veza postaje linearna:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \frac{m_0^2}{3kT}\mathbf{B} \ . \tag{9.3.21}$$

Magnetizacija je

$$\mathbf{M} = n \langle \mathbf{m} \rangle = \frac{m_0^2 n}{3kT}\mathbf{B} \ , \tag{9.3.22}$$

pa je magnetna relativna permeabilnost paramagnetika data sa

$$\mu = \frac{1}{1 - \frac{\mu_0 n m_0^2}{3kT}} \approx 1 + \frac{\mu_0 n m_0^2}{3kT} \ , \tag{9.3.23}$$

jer je

$$\frac{\mu_0 n m_0^2}{3kT} \ll 1 \ .$$

Vidimo da je magnetna relativna permeabilnost paramagnetika malo veća od 1. Magnetna susceptibilnost je obrnuto proporcijalna sa temperaturom. Ovaj iskaz je poznat kao Kirijev zakon. Ovaj rezultat je korektan na visokim temperaturama. Da bismo naši magnetnu permeabilnost paramagnetika na niskim temperaturama moramo da primenimo zakone kvantne mehanike.

Primer 1. Hamiltonijan atoma ukupnog angularnog momenta $\mathbf{J}$ u spoljašnjem polju je $H = -g\mu_B \mathbf{J}\cdot\mathbf{B} = -m_z B$, gde smo ignorisali kinetički i dijamagnetski član. Saglasno kvantnoj mehanici vrednosti projekcije angularnog momenta J_z su diskretne, $J_z = -J, \dots, J$. Odrediti srednju vrednost magnetnog dipolnog momenta atoma, ako projekcija angularnog momenta na osu magnetnog polja uzime vrednosti ± 1, ako je temeperatura je T. Odrediti magnetizaciju sredine sastavljene od ovih atoma.

Rešenje: Srednja vrednost magnetnog diponlog momenta je

$$\begin{aligned} \langle m_z \rangle &= \frac{\sum m_z e^{\frac{m_z B}{kT}}}{\sum e^{\frac{m_z B}{kT}}} \\ &= \frac{m_0 e^{\frac{m_0 B}{kT}} - m_0 e^{-\frac{m_0 B}{kT}}}{e^{\frac{m_0 B}{kT}} + e^{-\frac{m_0 B}{kT}}} \\ &= m_0 \tanh\left(\frac{m_0 B}{kT}\right) . \end{aligned} \tag{9.3.24}$$

Magnetizacija je

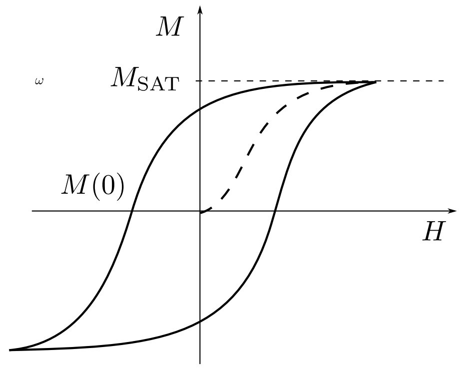
$$M = n m_0 \tanh\left(\frac{m_0 B}{kT}\right) .$$

Umesto Ležandrove funkcije koju smo dobili primenjujući klasičnu statistiku, ovde smo dobili hiperbolnu funkciju.

9.4 Feromagnetizam

Paramagnetici i dijamagnetici imaju magnetnu susceptibilnost približno jednaku nuli, pri čemu je susceptibilnost paramagnetika pozitivna, a dijamagnetika negativna. Sa druge strane susceptibilnost feromagnetika je dosta visoka, $\chi_m \sim 10^3 - 10^6$. Veza izmedju magnetizacije i jačine magnetnog polja kod feromagnetika je nelinarna. U feromagnetike spadaju gvoždje, nikal, kobalt, neke legure. Osnovna karakteristika feromagneta je da je njihova magnetizacija različita od nule i kad su van spoljneg magnetnog polja. Ova magnetizacija se naziva permanetnom (stalnom) magnetizacijom.

Ako je temperatura feromegnetika iznad neke kritiče temperature T_c feromagnetik prelazi u paramagnetik. Ova temperatura se naziva Kirijevom temperaturom. Kirijeva temperatura za gvoždje je 774^0C, a kobalta 1131^0C. Ukoliko je temperatura manja od kritične magnetik je u feromagnetnoj fazi, a ukoliko je $T > T_c$ magnetik je u paramagnetnoj fazi. Radi se o faznom prelazu. Veza izmedju magnetizacije i jačine polja, $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{H})$ kod feromagnetika je višeznačna funkcija. Neka su jačina polja i magnetizacija duž $z-$ ose, $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_3$. Pri povećanju jačine magnetnog polja, magnetizacija raste i pri dovoljno velikom spoljašnjem polju magnetizacija



Slika 9.2: Histerezisna petlja

ostaje stalna tj. došlo je do saturacije (zasićenja). Magnetizacija postaje M_{sat}. Ako smanjujemo magnetno polje magnetizacija ne opada po krivoj iz prethodnog procesa kada smo povećavali polje, već po krivoj koja je malo iznad krive magnetizovanja. Pri $H = 0$ magnetizacija $M_{\mathrm{per}} = M(H = 0)$ nije nula. Ova vrednost magnetizacije se naziva permanetnom magnetizacijom. Promenom smera polja magnetizacija nastavlja da raste u suprotnom smeru i za dovoljno veliko polje ponovo dolazi do saturacije. Sa daljim porastom magnetnog polja magnetizacija raste ali opet po drugoj krivoj. Zatvorena kriva prikazana na slici 9.2 je histerezisna kriva. Magnetizacija feromagnetika zavisi od prethodne istorije magnetika.

Jedan od prvih pokušaja da se objasne neke fenomenološke osobine feromagnetika potiče od Vajsa. Osnovna pretpostavka Vajsove teorije je postojanje domena. To su oblasti spontane magnetizacije feromagnetika, sastoje se od velikog broja jona kristalne rešetke. Domeni se ponašaju kao kruto telo i teže da se orjentišu u smeru spoljnjeg polja. Termalno kretanje im se u tome suprostavlja ali i činjenica da su domeni gusto napakovani.

Na svaki domen deluje efektivno polje

$$\mathbf{H}_{\mathrm{eff}} = \mathbf{H} + \mathbf{H}_{\mathrm{mol}} \ ,$$

koje je zbir spoljnjeg polja i molekulsog polja, $\mathbf{H}_{\mathrm{mol}}$ koje potiče od ostalih domena. Interakcija sa drugim domenima se ne može zanemariti. Pretpostavka je da je molekulsko polje proporcionalno sa magnetizacijom $\mathbf{H}_{\mathrm{mol}} = \alpha\mathbf{M}$, gde je $\alpha \gg 1$. Efektivna magnetna indukcija je onda

$$\mathbf{B}_{\mathrm{eff}} = \mu_0(\mathbf{H}_{\mathrm{eff}} + \mathbf{M}) \approx \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\alpha\mathbf{M} \ . \tag{9.4.25}$$

Da bismo našli magnetizaciju primenićemo Lanžvenovu teoriju zasnovanu na klasičnoj Bolcmanovoj raspodeli. Ako sa n_d označimo koncentraciju domena, sa m_d magnetni dipolni moment domena onda je magnetizacija data sa

$$\mathbf{M} = n_d m_d L\Big(\frac{m_d B_{\mathrm{eff}}}{kT}\Big)\frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} \ . \tag{9.4.26}$$

Za velika polja Lanžvenova funkcija teži jedinici što odgovara saturaciji, $\mathbf{M}_{\mathrm{sat}} = n_d m_d \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$.

Iz (9.4.26) sledi

$$\frac{M(0)}{M_{\rm sat}} = L\Big(\frac{\mu_0 \alpha M_{\rm sat}^2}{kTn_d}\frac{M(0)}{M_{\rm sat}}\Big) \ , \tag{9.4.27}$$

što je transcedentna jednačina po $M(0)/M_{\rm sat}$. Nas interesuje samo egzistencija rešenja ove jednačine. Rešenje je u preseku Lanžvenove krive

$$\frac{M(0)}{M_{\rm sat}} = L(x) \ , \tag{9.4.28}$$

i prave

$$\frac{M(0)}{M_{\rm sat}} = \frac{n_d kT}{\mu_0 \alpha M_{\rm sat}^2} x \equiv Ax \ , \tag{9.4.29}$$

gde je

$$A = \frac{n_d kT}{\mu_0 \alpha M_{\rm sat}^2} \ .$$

Za $A > \frac{1}{3}$ ove dve krive seku se samo u koordinatnom početku. Ali za $A < \frac{1}{3}$ ove dve krive se seku u koordinatnom početku ali i u još jednoj tački. Postojanje ove druge presečne tačke znači da je magnetizacija magnetika van spoljašnjeg magnetnog polja, $M(H=0)$ različita od nule. Uslov $A < \frac{1}{3}$ za postojanje ovog rešenja daje

$$T < T_c = \frac{\mu_0 \alpha M_{\rm sat}^2}{3n_d k} \ . \tag{9.4.30}$$

Vidimo da feromagnetizam postoji pri temperaturama manjim od T_c. Vajsova teorija domena objašnjava postojanje kritične temperature magnetika. Medjutim mnoge eksperimentalne rezultate Vajsova teorija ne može da objasni. Navešćemo dva takva primera.

Ako je $T \gg T_c$ onda diferenciranjem izraza

$$M = n_d m_d L\Big(\frac{\mu_0 m_d}{kT}(H + \alpha M)\Big) \tag{9.4.31}$$

po H dobijamo

$$\chi_m = \frac{\partial M}{\partial H} \approx \frac{\mu_0 n_d m_d^2}{3kT}(1 + \alpha \chi_m) \tag{9.4.32}$$

odakle je

$$\chi_m = \frac{T_c}{\alpha(T - T_c)} \ . \tag{9.4.33}$$

Medjutim, eksperimentalni rezultat je da se magnetna susceptibilnost feromagnetika za $T \gg T_c$ ponaša prema

$$\chi_m \sim \frac{1}{T - \theta} \ , \tag{9.4.34}$$

gde je θ za $15 - 40$K veće od Kirijeve temperature.

Za veliko x važi

$$L(x) \approx 1 - \frac{1}{x}$$

pa je, po Vajsovoj teoriji, zavisnost permanetne magnetizacije u oblasti niskih temperatura, $T \ll T_c$, data sa

$$M(0) = M_{\mathrm{sat}}\Big(1 - \frac{T}{3T_c}\Big) \ . \tag{9.4.35}$$

Eksperimentalni rezultat je drugačiji

$$M(0) = M_{\mathrm{sat}}(1 - CT^{3/2}) \ , \tag{9.4.36}$$

gde je C konstanta. Recimo na kraju da je feromagnetizam čist kvantno–mehanički efekat. Kvantna teorija feromagnetizma inicirana je od strane Hajzenberga. Više detalja o magnetizmu čućete na kursu Fizike kondenzovane materije.

Glava 10

Elektromagnetni talasi u vakuumu i neprovodnim sredinama

Ovo poglavlje posvećeno je elektromagnetnim talasima u vakuumu i u neprovodnim sredinama u kojima nema disperzije. Analizirana su partikulularna rešenja talasne jednačine kao što su: ravni talasi, sferni talasi kao i ravni monohromatski talasi. Diskutovana je polarizovanost ravnih monohromatskih talasa u vakuumu. Poslednje poglavlje pručava elektromagnetno polje u šupljini. Videćemo da se polje u šupljini svodi da sistem oscilatora. Uz malu pomoć statističke fizike izvešćemo Plankov zakon zračenja.

10.1 Talasna jednačina

Razmotrićemo elektromagnetno polje u linearnoj neprovodnoj sredini bez disperzije kod koje su dielektrična propustljivost i magnetna permeabilnost konstantne. Elektrodinamičke jednačine sredine su

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \ \mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} \ . \tag{10.1.1}$$

Takodje, uzećemo da u sredini nemamo makroskopskih nealektrisanja, tj. da su odsutni izvori. Maksvelove jednačine u ovom slučaju su

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}) = 0 \tag{10.1.2}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0 \tag{10.1.3}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{10.1.4}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ . \tag{10.1.5}$$

Ako uzmemo rotor četvrte Maksvelove jednačine i primenimo treću Maksvelovu jednačinu dobijamo

$$\mathrm{graddiv}\mathbf{B} - \triangle \mathbf{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \ . \tag{10.1.6}$$

Konačno primenom druge Maksvelove jednačine dolazimo do

$$\triangle \mathbf{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \ , \tag{10.1.7}$$

gde je

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \ . \tag{10.1.8}$$

Slično uzimanjem rotora treće Maksvelove jednačine dobijamo

$$\triangle \mathbf{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0 \ , \tag{10.1.9}$$

Električno i magnetno polje zadovoljavaju talasne jednačine. Dakle, u oblasti prostora gde su odsutni izvori postoji elektromagnetni talas.

Faza talasa je veličina koja karakteriše stanje talasnog procesa. Skup tačaka u prostoru koje u fiksnom trenutku vremena imaju istu fazu oscilovanja obrazuje talasnu površ. Ako su talasne površi ravni kažemo da je talas ravan. Kod sfernog talasa talasne površi su sfere. Fazna brzina je brzina sa kojom se kreće fazna površ. Fazna brzina elektromagnetnog talasa opisanog jednačinama (10.1.7) i (10.1.9) je v. Fazna brzina elektromagnetnog talasa u vakuumu je $v = c$. Indeks prelamanja sredine definisan je kao odnos brzine svetlosti i brzine talasa u sredini $n = c/v = \sqrt{\varepsilon\mu} \approx \sqrt{\varepsilon}$.

Kao što znamo potencijali elektromagnetnog polja nisu jednoznačni. Neka potencijali zadovoljavaju Kulonov kalibracioni uslov, div$\mathbf{A} = 0$. Pošto je $\rho = 0$ iz (2.6.117) sledi[1] da je $\phi = 0$. Dakle, uzećemo da potencijali elektromagnetnog polja talasa zadovoljavaju

$$\phi = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{A} = 0 \ . \tag{10.1.10}$$

Elektromagnetno polje je kompletno odredjeno vektorskim potencijalom prema

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \mathrm{rot}\mathbf{A} \ . \end{aligned} \tag{10.1.11}$$

10.2 Ravni talasi

Jednostavnosti radi razmatraćemo talasnu jednačinu

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \ , \tag{10.2.12}$$

gde je $F = F(t, x)$, tj. funkcija F zavisi od promenljivih t i x. Uvešćemo nove promenljive[2] $\xi^{\pm} = x \pm vt$, odakle je

$$\begin{aligned} x &= \frac{\xi^+ + \xi^-}{2} \\ vt &= \frac{\xi^+ - \xi^-}{2} \ . \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

[1] Pretpostavljamo da potencijal teži nuli u beskonačnosti.
[2] Ako je $v = c$ ove koordinate se često nazivaju koordinatama svetlosnog konusa (light-cone coordinates).

Parcijalne izvode po promenljivima t i x možemo izraziti preko parcijalnih izvoda po novim promenljivima. Rezultat je:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi^+} + \frac{\partial}{\partial \xi^-} \\ \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi^+} - \frac{\partial}{\partial \xi^-} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^{+2}} + 2\frac{\partial^2}{\partial \xi^+ \partial \xi^-} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^{-2}} \\ \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial \xi^{+2}} - 2\frac{\partial^2}{\partial \xi^+ \partial \xi^-} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^{-2}} \ .\end{aligned} \tag{10.2.14}$$

Posle ove smene promenljivih talasna jednačina (10.2.12) postaje

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^+ \partial \xi^-} F = 0 \ . \tag{10.2.15}$$

Opšte rešenje ove jednačine je superpozicija dva talasa F_1 i F_2:

$$F = F_1(x - vt) + F_2(x + vt) \ . \tag{10.2.16}$$

Faza talasa $F_1 = F_1(x-vt)$ je $\phi = x-vt$. Skup tačaka sa konstantnom fazom u fiksnom trenutku vremena odredjen je sa $x = \text{const.}$ pa je talas ravan. Uočimo talasnu površ $x = x_0$ u trenutku t_0. U svim tačkama ove površi vrednost funkcije F_1 je ista. U trenutku $t_0 + \mathrm{d}t$ skup tačaka sa istom vrednošću funkcije F_1 je dat sa $x_0 + \mathrm{d}x$, tj. uočena fazna površ se premestila iz položaja x_0 u položaj $x_0 + \mathrm{d}x$. Dakle,

$$x_0 - vt = x_0 + \mathrm{d}x - v(t + \mathrm{d}t) \ . \tag{10.2.17}$$

Fazna brzina, tj. brzina sa kojom se pomera fazna površ rešenja $F_1 = F_1(x - vt)$ je

$$v_f = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \ . \tag{10.2.18}$$

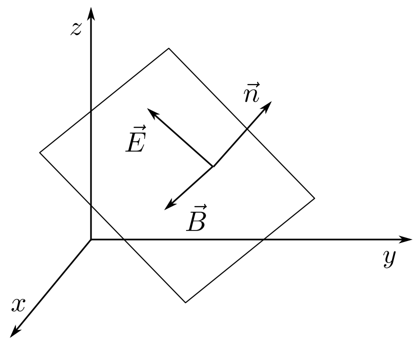
Jednostavnije, faznu brzinu talasa nalazimo diferenciriranjem izraza $\phi = x - vt = \text{const.}$ Talas F_1 je ravan talas koji propagira u pozitivnom smeru x ose brzinom v. Drugo partikularno rešenje $F_2 = F_2(x + vt)$ je ravan talas fazne brzine $-v$. Tokom propagacije talasa funkcije F_1 odnosno F_2 ne menjaju svoj oblik jer nema disperzije talasa.

Generalizacija 'jednodimenzionog' talasa na trodimenzioni slučaj je pravolinijska. Ravni elektromagnetni talas kompletno je odredjen vektorskim potencijalom

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt) \ , \tag{10.2.19}$$

gde je $\mathbf{n}$ ort talasne površi. Faza ovog talasa je $\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} - vt$. Talasne površi su $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \text{const.}$, što su jednačine ravni. Fazna brzina talasa je $\mathbf{v_f} = v\mathbf{n}$. Talas se prostire u smeru orta normale površi, $\mathbf{n}$. Jačina električnog polja je

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi} = v\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi} \ , \tag{10.2.20}$$



Slika 10.1: Fazna površ ravnom elektromagnetnog talasa

a magnetna indukcija

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathrm{rot}\mathbf{A} = \epsilon_{ijk}\frac{\partial A_k}{\partial x_j}\mathbf{e}_i \\ &= \epsilon_{ijk}n_j\frac{\mathrm{d}A_k}{\mathrm{d}\xi}\mathbf{e}_i \\ &= \mathbf{n}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi}\ . \qquad (10.2.21)\end{aligned}$$

Iz izraza za električno i magnetno polje ravnog talasa vidimo da oni zadovoljavaju sledeću jednačinu

$$\mathbf{B} = \frac{1}{v}(\mathbf{n}\times\mathbf{E})\ . \qquad (10.2.22)$$

Iz (10.2.22) sledi $\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = 0$, tj. magnetno polje je ortogonalno na pravac prostiranja talasa. Kulonov kalibracioni uslov div$\mathbf{A} = 0$ daje $\mathbf{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}\xi} = 0$, pa je i električno polje ortogonalno na pravac prostiranja talasa, tj. $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n} = 0$. Prema tome elektromagnetni talas je transverzalan. Iz (10.2.22) sledi

$$\mathbf{E} = v\mathbf{B}\times\mathbf{n}\ . \qquad (10.2.23)$$

Vektori $\mathbf{n}, \mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ čine desni trijedar, kao što je prikazano na slici 10.1. Kvadriranjem (10.2.22) dobijamo da su zapreminske gustine energije električnog i magnetnog polja ravnog talasa jednake

$$\frac{\epsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^2}{2} = \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0\mu}\ . \qquad (10.2.24)$$

Gusina elektromagnetne energije ravnog talasa je

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}\epsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0\mu} = \epsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^2 = \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0\mu}. \qquad (10.2.25)$$

Pointingov vektor ravnog elektromagnetnog talasa je $\mathbf{S}_p = vu\mathbf{n}$, dok je gustina impulsa data sa $\mathbf{g} = \frac{vu}{c^2}\mathbf{n}$. Pointingov vektor i gustina impulsa ravnog talasa su kolinearni sa pravcem prostiranja talasa.

Pokažite da je za ravan elektromagnetni talas u vakuumu važi $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 0$.

10.3 Sferni talas

U ovom poglavlju razmatraćemo talasnu jednačinu za skalarno polje, F. Talasna jednačina ima standardan oblik:

$$\triangle F - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \; . \tag{10.3.26}$$

Opšte rešenje ove jednačine možemo izraziti u sfernim koordinatama

$$F(t,r,\theta,\varphi) = \sum_{lm} \frac{u_{lm}(t,r)}{r} Y_{lm}(\theta,\varphi) \; ,$$

gde su $u_{lm}(t,r)$ funkcije. Medjutim, mi ćemo razmatrati samo sferno-simetrično rešenje, tj. predpostavićemo da je $F = F(t,r)$. Drugim, rečima posmatraćemo najniži mod $l = m = 0$ talasne jednačine. Partikularno rešenje talasne jednačine je

$$F = \frac{u_1(r-ct)}{r} + \frac{u_2(r+ct)}{r} \; , \tag{10.3.27}$$

gde su u_1 i u_2 proizvoljne funkcije. Kako su talasne površi sfere $r =$ const. talas je sferni. Rešenje $u_1(r-ct)/r$ predstavlja sferni talas koji propagira od centra faznom brzinom c, a talas $u_2(r+ct)/r$ propagira ka centru.

10.4 Ravan monohromatski talas

Talasne jednačine elektromagnetnog talasa u vakuumu su

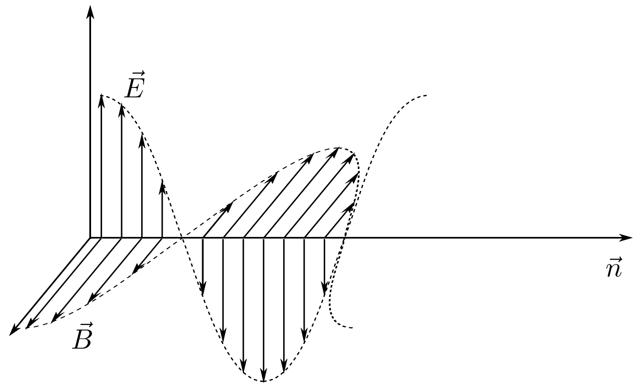
$$\begin{aligned} \Box \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{A} = 0 \\ \Box \mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{E} = 0 \\ \Box \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{B} = 0 \; . \end{aligned} \tag{10.4.28}$$

Talas kod kojeg su polja proporcionalna harmonijskim funkcijama, tj.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_1(\mathbf{r})\cos\omega t + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})\sin\omega t \\ \mathbf{B}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_1(\mathbf{r})\cos\omega t + \mathbf{B}_2(\mathbf{r})\sin\omega t \end{aligned} \tag{10.4.29}$$

je monohromatski talas. Frekvenca talasa je ω. Polja zadovoljavaju Helmholcove jednačine

$$\begin{aligned} \triangle \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} &= 0 \\ \triangle \mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{B} &= 0 \; . \end{aligned} \tag{10.4.30}$$



Slika 10.2:

Ako vreme t u izrazima za polja monohromatskih talasa zamenimo sa $t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}$, i pri tome uzmemo da su $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ konstantni vektori onda će monohromatski talas biti i ravan. Prema tome, polja ravnog monohromatskog elektromagnetnog talasa su

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}) + \phi) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \phi) \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 \cos(\omega(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}}{c}) + \phi) = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \phi) \ . \end{aligned} \tag{10.4.31}$$

Veličine $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{B}_0$ su amplitude talasa, ω je frekvenca talasa, a ϕ početna faza. Često se uzima $\phi = 0$. Takodje smo uveli talasni vektor $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$. Argument trigonometrijskih funkcija u (10.4.31), $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ je faza ravnog monohromatskog talasa. Veza izmedju talasnog vektora i frekvence talasa se naziva disperzionom relacijom. Zamenom rešenja za ravan monohromatski talas (10.4.31) u talasne jednačine dobijamo disperzionu relaciju $\omega^2 = c^2\mathbf{k}^2$. Primetimo da električno i magnetno polje imaju iste faze, tj. osciluju u fazi. Na slici 10.2 prikazan je ravan monohromatski talas koji koji se prostire duž pravca $\mathbf{n}$. Nacrtane su vrednosti električnog i magnetnog polja u fiksnom trenutku vremena a u različitim tačkama prostora. U fiksnoj tački u prostoru polja su periodične vremenske funkcije sa periodom $T = 2\pi/\omega$. Pored toga, u fiksnom trenutku vremena polja su prostorno periodična. Ovaj prostorni period odredjen je uslovom $\mathbf{k}\cdot\mathbf{R} = 2\pi$ i vidimo da zavisi od pravca. Najmanji je u pravcu prostiranja talasa. Naziva se talasnom dužinom talasa, $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$. Lako se vidi da je $\lambda = c/\nu$.

Neka je $F = F_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \phi)$ prosto periodična funkcija. Uvedimo kompleksni analogon ove veličine $\hat{F}$ sa

$$\hat{F} = \hat{F}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ , \tag{10.4.32}$$

gde je $\hat{F}_0 = F_0 e^{-i\phi}$ kompleksna amplituda. Jasno je da je veličina F realni deo od kompleksne veličine $\hat{F}$. Uvodjenje kompleksnih veličina olakšava nam račun, jer je lakše raditi sa eksponencijalnim nego sa trigonometrijskim funkcijama. Ako uzmemo da je $\hat{\mathbf{F}}$ vektor onda je

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\hat{\mathbf{F}} &= i\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{F}} \\ \mathrm{rot}\hat{\mathbf{F}} &= i\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{F}} \\ \frac{\partial\hat{\mathbf{F}}}{\partial t} &= -i\omega\hat{\mathbf{F}} \ , \end{aligned} \tag{10.4.33}$$

pa Maksvelove jednačine za ravne monohromatske talase postaju algebarske:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{E}} &= 0 \\
\mathbf{k}\cdot\hat{\mathbf{B}} &= 0 \\
\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{E}} &= \omega\hat{\mathbf{B}} \\
\mathbf{k}\times\hat{\mathbf{B}} &= -\frac{\omega}{c^2}\hat{\mathbf{E}}\ .
\end{aligned} \tag{10.4.34}$$

Izrazimo Pointingov vektor ravnog monohromatskog talasa preko kompleksnih polja

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_p &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B} \\
&= \frac{1}{4\mu_0}(\hat{\mathbf{E}}+\hat{\mathbf{E}}^*)\times(\hat{\mathbf{B}}+\hat{\mathbf{B}}^*)\ .
\end{aligned} \tag{10.4.35}$$

Srednja vrednost Pointingovog vektora dobija se usrednjavanjem za vreme od jednog perioda $T = 2\pi/\omega$. Data je sa

$$\langle \mathbf{S}_p \rangle = \frac{1}{2\mu_0}\Re e(\hat{\mathbf{E}}_0\times\hat{\mathbf{B}}_0^*)\ , \tag{10.4.36}$$

gde je $\Re e$ oznaka za realni deo. Lako se vidi da su srednje vrednosti gustina energije date sa

$$\begin{aligned}
\langle u_e \rangle &= \frac{\epsilon_0}{4}|\hat{\mathbf{E}}_0|^2 \\
\langle u_b \rangle &= \frac{1}{4\mu_0}|\hat{\mathbf{B}}_0|^2\ .
\end{aligned} \tag{10.4.37}$$

10.5 Furijeov integral

Proizvoljnu funkciju $F(t,\mathbf{r})$ razvićemo u Furijeov integral:

$$F(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}F_{\omega\mathbf{k}}e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\ , \tag{10.5.38}$$

gde su $F_{\omega\mathbf{k}}$ Furijeove amplitude. U (10.5.38) frekvenca ω i talasni vektor $\mathbf{k}$ su nezavisne veličine. Furijeove amplitude se dobijaju inverznom Furijeovom transformacijom funkcije $F(t,\mathbf{r})$ i date su sa

$$F_{\omega\mathbf{k}} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}F(t,\mathbf{r})e^{i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\ . \tag{10.5.39}$$

Ovo se lako pokazuje:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}F_{\omega\mathbf{k}}e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int \mathrm{d}^3\mathbf{k}F(t',\mathbf{r}')e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}e^{i(\omega t'-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\mathrm{d}^3\mathbf{r}'F(t',\mathbf{r}')\delta(t-t')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
&= F(t,\mathbf{r})\ .
\end{aligned} \tag{10.5.40}$$

10.6 Polarizovanost ravnog monohromatskog elektromagnetnog talasa

Polarizovanost ravnog monohromatskog talasa u vakuumu analiziraćemo razmatrajući električno polje talasa. Ono je dato sa

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ , \tag{10.6.41}$$

gde je $\hat{\mathbf{E}}_0$ kompleksna amplituda električnog polja. Kompleksnu amplitudu polja ćemo rastaviti u realan i imaginaran deo

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \mathbf{E}_{01} + i\mathbf{E}_{02} \ . \tag{10.6.42}$$

Amplitudu električnog polja napisaćemo u obliku

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = (\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 + i\boldsymbol{\mathcal{E}}_2)e^{i\delta} \ , \tag{10.6.43}$$

gde su $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2$ realni vektori. Parametar δ odredjujemo iz uslova da realni vektori $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2$ budu medjusobno ortogonalni. Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_1 &= \mathbf{E}_{01}\cos\delta + \mathbf{E}_{02}\sin\delta \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 &= -\mathbf{E}_{01}\sin\delta + \mathbf{E}_{02}\cos\delta \ . \end{aligned} \tag{10.6.44}$$

Uslov ortogonalnosti vektora $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2$ daje

$$\tan(2\delta) = \frac{2\mathbf{E}_{01}\cdot\mathbf{E}_{02}}{(\mathbf{E}_{01})^2 - (\mathbf{E}_{02})^2} \ . \tag{10.6.45}$$

Električno polje je realni deo kompleksnog polja, pa je

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_1\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta) - \boldsymbol{\mathcal{E}}_2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta). \tag{10.6.46}$$

Vektori $\mathbf{E}_{01}$, $\mathbf{E}_{02}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2$ leže u ravni ortogonalnoj na talasni vektor $\mathbf{k}$. Skup vektora $(\mathbf{k},\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_1,\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_2)$ čine ili desni ili levi trijedar. To znači da za fiksnu vrednost talasnog vektora $\mathbf{k}$ postoje dva stepena slobode talasa. Ako izberemo da je talasni vektor duž $z-$ ose, $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$ onda možemo izabrati $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_1\mathbf{e}_1$ i $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2 = \pm\mathcal{E}_2\mathbf{e}_2$, gde su $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$ pozitivni. Iz (10.6.46) vidimo da komponente električnog polja zadovoljavaju jednačinu elipse

$$\frac{E_x^2}{\mathcal{E}_1^2} + \frac{E_y^2}{\mathcal{E}_2^2} = 1 \ . \tag{10.6.47}$$

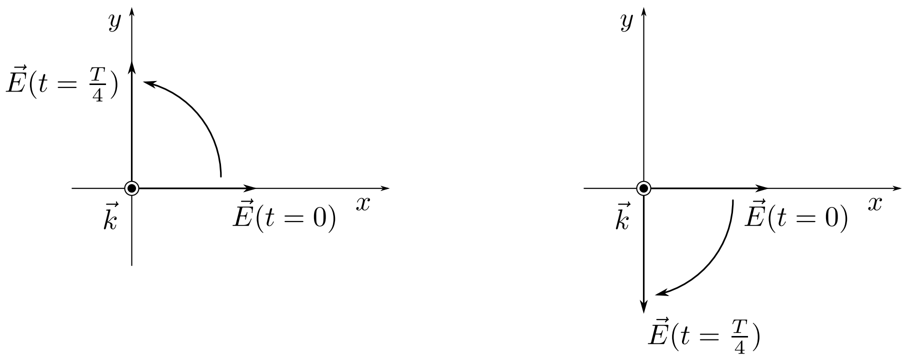
Dakle, vrh vektora električnog polja opisuje elipsu u ravni ortogonalnoj na pravac prostiranja talasa.

Električno polje je

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_1\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)\mathbf{e}_1 \mp \mathcal{E}_2\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t + \delta)\mathbf{e}_2 \ . \tag{10.6.48}$$

Analiziraćemo šta se dešava sa vektorom električnog polja u fiksnoj tački u prostoru, recimo $\mathbf{r} = 0$, što je najjednostavniji izbor. Iz (10.6.48) sledi

$$\mathbf{E} = \mathcal{E}_1\cos(\omega t - \delta)\mathbf{e}_1 \pm \mathcal{E}_2\sin(\omega t - \delta)\mathbf{e}_2 \ . \tag{10.6.49}$$



Slika 10.3: Levo (leva slika) i desno (desna slika) polarizovani talasi.

Za obe vrednosti znaka vrh vektora električnog polja opisuje elipsu u $x0y-$ ravni. Za gornju vrednost znaka, električno polje rotira suprotno kazaljci na satu (leva slika na 10.3), a za donju u smeru kazaljke na satu (desna slika na 10.3). U prvom slučaju kažemo da je talas levo polarisan a trijedar ($\mathbf{k}$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_2$) je desni. U drugom slučaju (donji znak) talas je desno polarisan dok je trijedar levi. Leva i desna polarizacija su zastareli termini. Levo (desno) polarisan talas su pozitivnog (negativnog) heliciteta. Helicitet je projekcija spina na pravac kretanja [3]. Dakle, postoje dva nezavisna eliptički polarisana talasa: levi i desni. Ako je $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ talas je kružno polarisan i opet postoje dve nezavisne polarizacije. Ukoliko je električno polje duž nekog fiksnog pravca talas je linearno polarisan. Opet postoje dva nezavisna linearno polarizovana talasa. Npr. jedan duž x a drugi duž y ose.

Ako imamo na umu da vektor električnog polja leži u ravni normalnoj na talasni vektor, tj. da pripada dvodimenzionoj ravni, onda je jasno da postoje dva nezavisna stepena slobode ravnog monohromatskog talasa.

10.6.1 Delimično polarizovan talas

Svetlost od realnih izvora nije monohromatska, već predstavlja superpoziciju monohromatskih talasa u nekom opsegu frekvenci $\Delta\omega$ oko neke frekvence ω. U fiksnoj tački prostora električno polje je

$$\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega t} \ .$$

Funkcija $\mathbf{E}_0(t)$ odredjuje polarizaciju talasa koja se menja sa vremenom. Dobijeni talas je delimično polarizovan. Za opisivanje polarizacije talasa koristimo vremensku srednju vrednost kvadratne funkcije po jačinama polja

$$J_{ij} = \langle E_{0i}(t)E^*_{0j}(t)\rangle \ . \tag{10.6.50}$$

gde indeksi i, j uzimaju vrednosti iz skupa $1, 2$. Polarizacioni tenzor je definisan sa

$$\rho_{ij} = \frac{J_{ij}}{J} \ , \tag{10.6.51}$$

[3]Više detalja u kursu Kvantne teorije polja 1. Bez obzira što sam pomenuo termin spin, on je kvantni stepen slobode.

gde je $J = \mathrm{tr}\hat{J}$. Ako se talas prostire duž $z-$ose, tada se komponete polja u polarizacionom tenzoru $\hat{\rho}$ duž x, odnosno y ose. Polarizacione tenzor je

$$\hat{\rho} = \frac{1}{J}\begin{pmatrix} \langle E_{01}(t)E^*_{01}(t)\rangle & \langle E_{01}(t)E^*_{02}(t)\rangle \\ \langle E_{02}(t)E^*_{01}(t)\rangle & \langle E_{02}(t)E^*_{02}(t)\rangle \end{pmatrix} \ . \tag{10.6.52}$$

Ova matrica je hermitska i jediničnog traga. Proizvoljna hermitska matrica jediničnog traga ima oblik

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & -s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\Big(1 + \mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big). \tag{10.6.53}$$

Realni parametri s_i su poznati kao Stoksovi parametri. Determinanta ove matrice je

$$\det\hat{\rho} = \frac{1}{4}(1 - s_1^2 - s_2^2 - s_3^2) \ .$$

Determinanta ove matrice zadovoljava uslov $\det\hat{\rho} \geq 0$. Veličina $P = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2} \leq 1$ naziva se stepenom polarizacije.

Za monohromatsku svetlost komponete električnog polja su konstante i determinanta polarizacionog tenzora je jednaka nuli. Važi i obrnuto. Ako je determinata polarizacionog tenzora nula talas je polarizovan. Za kružno polarisan talas je $E_{0x} = \pm iE_{0y}$ pa je polarizacioni tenzor

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{10.6.54}$$

Pokažite da je polarizacioni tenzor talasa polarisanog duž x ose

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{10.6.55}$$

Sa druge strane za potpuno nepolarisanu svetlost svi pravci u xOy ravni su ekvivalentni pa je

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ . \tag{10.6.56}$$

Polarizacioni tenzor ima determinatu $\frac{1}{4}$, što odgovara minimalnoj vrednosti stepena polarizacije, $P = 0$. Nepolarisano zračenje je nekorelisano, za razliku od polarisanog koje je korelisano.

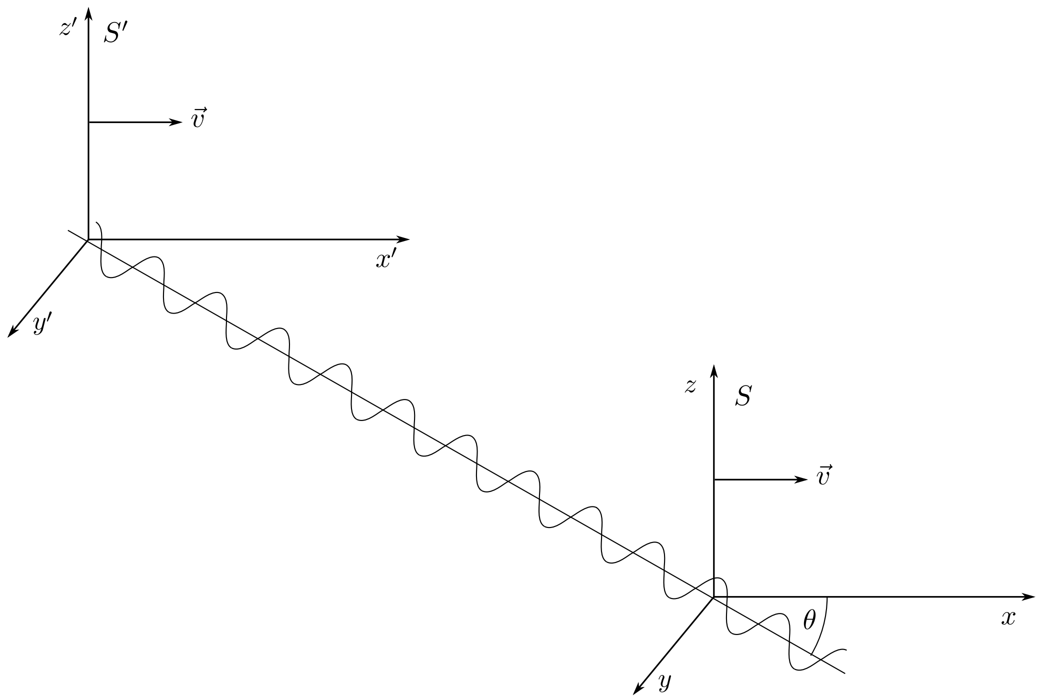
10.7 Doplerov efekt i aberacija svetlosti

Tenzor jačine polja ravnog monohromatskog talasa je oblika

$$\hat{F}^{\mu\nu} = \hat{f}^{\mu\nu}e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ , \tag{10.7.57}$$

gde su $\hat{f}^{\mu\nu}$ konstantne amplitude. Za posmatrača iz drugog inercijalnog sistema, S' tenzor jačine polja mora imati isti oblik, ali su sve veličine primovane

$$\hat{F}'^{\mu\nu} = \hat{f}'^{\mu\nu}e^{-i(\omega' t' - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}')} \ . \tag{10.7.58}$$



Slika 10.4: Doplerov efekat

Posmatrač u sistemu S' takodje vidi elektromagnetni talas, ali sa promenjenom frekvencom ω' i talasnim vektorom $\mathbf{k}'$. Na osnovu zakona transformacije tenzora jačine polja

$$\begin{aligned} \hat{F}'^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\hat{F}^{\rho\sigma} \\ &= \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\hat{f}^{\rho\sigma}e^{-i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{10.7.59}$$

zaključujemo da važe sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} &\hat{f}'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}\hat{f}^{\rho\sigma} \\ &\omega' t' - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}' = \omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\ . \end{aligned} \tag{10.7.60}$$

Faza talasa je skalar (invarijanta). Fazu talasa $\frac{\omega}{c}(ct) - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ možemo da prepišemo u obliku skalarnog proizvoda vektora položaja x^{μ} i vektora $k^{\mu} = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$. Dakle

$$\frac{\omega}{c}(ct) - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_{\mu}x^{\mu}\ . \tag{10.7.61}$$

Četvorovektor k^{μ} se naziva talasni četvorovektor. Lako se vidi da je $k_{\mu}k^{\mu} = 0$, tj. on je vektor nulte norme (svetlosnog tipa). Kao i bilo koji drugi četvorovektor i talasni vektor pri Lorencovim transformacijama se menja prema $k'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}k^{\nu}$, gde su k'^{μ} komponente talasnog četvotovektora u sistemu S' dobijenog Lorencovom transformacijom sistema S. Konkretno pri boostu duž x-ose veza izmedju frekvenci i Dekartovih komponenti talasnog vektora u dva sistema je

$$\begin{pmatrix} \omega'/c \\ k'_x \\ k'_y \\ k'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega/c \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} ,$$

odnosno

$$\omega' = \frac{\omega - vk_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , k'_x = \frac{k_x - \frac{v}{c^2}\omega}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \ , k'_y = k_y, \ k'_z = k_z \ . \tag{10.7.62}$$

Neka se u koordinatnom početku sistema S' nalazi izvor svetlosti frekvence $\omega' = \omega_0$, ovo je sopstvena frekvenca, jer izvor miruje u ovom sistemu (slika 10.4). Sa θ smo obeležili ugao koji talasni vektor zaklapa sa $x-$osom u sistemu S. Dalje je $k_x = k\cos\theta = \frac{\omega}{c}\cos\theta$ pa je frekvenca talasa koju registruje posmatrač u S

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\omega_0 \ . \tag{10.7.63}$$

Ova promena frekvence je Doplerov efekat.

Ugao koji pravac talasnog vektora, $\mathbf{k}'$ zaklapa sa x' je θ' za posmatrača u sistemu S', se dobija da iz

$$\tan\theta' = \frac{k'_y}{k'_x} \ . \tag{10.7.64}$$

Lako se dobija da je veza izmedju uglova θ i θ' data sa

$$\tan\theta' = \frac{c\sin\theta}{c\cos\theta - v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ . \tag{10.7.65}$$

Uglovi pod kojima se svetlost kreće nisu isti za posmatrače iz S i S'. Ova pojava je poznata pod imenom aberacija svetlosti.

10.8 Termodinamički ravnotežno zračenje u šupljini

Analiziraćemo elektromagnetno polje u šupljini. Atomi (molekuli) materijala koji se nalazi na zidu šupljine pri prelazu sa viših na niže nivoe emituju zračenje u šupljinu. Pored emisije zračenja na zidu šupljine vrši se i obrnut proces, tj. apsorpcija zračenja. Posle nekog vremena dolazi do uspostavljanja termodinamičke ravnoteže izmedju supstance na zidovima šupljine i zračenja. Tada se emitovana i apsorbovana energija izjednače. U stanju termodinamičke ravnoteže zračenje je homogeno i izotropno. Temperatura zračenja je temperatura supstance na zidovima šupljine. Toplotno zračenje u šupljini karakteriše se gustinom energije polja

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 \ .$$

Spektralna gustina energije u_ω je gustina energije zračenja čija je frekvenca izmedju ω i $\omega + \mathrm{d}\omega$, tj.

$$u = \int_0^\infty u_\omega \mathrm{d}\omega \ . \tag{10.8.66}$$

Spektralna gustina energije zavisi od frekvence i temperature zračenja, a ne zavisi od vrste supstance na zidovima šupljine. Ovo je tzv. Kirhofov zakon. On se lako pokazuje. Neka imamo dve šupljine na istim temperaturama ali sa različitim supstancama na zidovima. Jedna supstanca više apsorbuje zračenje, a druga manje. Kad spojimo šupljine onda bi temperatura u onoj šupljini čija supstanca više apsorbuje porasla. Izmedju ove dve šupljine pojavila bi se razlika temperatura bez utroška rada. To je nemoguće prema drugom principu termodinamike. Zaključujemo da spektralna gustina energije zračenja u šupljini ne zavisi od vrste materijala na njenim zidovima.

Apsolutno crno telo je telo koje apsorbuje svu energiju koja na nju padne i to za svaku frekvencu. Naravno ovu energiju zatim crno telo i izrači.

Uzećemo da elektromagnetni potencijali zadovoljavaju Kulonov kalibracioni uslov $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0, \phi = 0$. U ovoj kalibraciji elektromagnetno polje je kompletno odredjeno vektorskim potencijalom, koji zadovoljava talasnu jednačinu

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \triangle \mathbf{A} = 0 \ . \tag{10.8.67}$$

Partikularno rešene talasne jednačine (10.8.67) tražićemo u obliku $\mathbf{A}_\mathbf{k}(t)e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, gde je $\mathbf{k}$ konstantan talasni vektor. Zamenom partikularnog rešenja u jednačinu (10.8.67) dobijamo

$$\ddot{\mathbf{A}}_\mathbf{k} + c^2\mathbf{k}^2\mathbf{A}_\mathbf{k} = 0 \tag{10.8.68}$$

odakle je $\mathbf{A}_\mathbf{k} \sim e^{\pm i\omega_k t}$, gde je $\omega_k = c|\mathbf{k}|$. Dakle partikularna rešenja jednačine (10.8.67) su

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})e^{\pm i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ , \tag{10.8.69}$$

gde je $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k})$ vektor polarizacije. Iz $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ sledi $\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{k}) = 0$. Vektor polarizacije leži u ravni ortogonalnoj na vektor $\mathbf{k}$ pa prema tome postoje dva nezavisna vektora polarizacije, $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}),\ \sigma = 1, 2$ koja smo indeksirali indeksom σ. Ta dva stepena slobode ravnog monohromatskog talasa su njegove dve polarizacije. Neka ravan monohromatski talas propagira duž $z-$ ose, tj. $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_3$. Za dva nezavisna vektora polarizacije možemo uzeti $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_1,\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_2$. To su dva linearno polarizovana talasa. Vektori polarizacije

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k}) &= \frac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{10.8.70}$$

opisuju kružnu polarizaciju. Vektori polarizacije su ortonormirani

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\sigma'}(\mathbf{k}) = \delta_{\sigma\sigma'} . \tag{10.8.71}$$

Uzećemo da je $\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(-\mathbf{k}) = \boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k})$. Na ovaj način vektori polarizacije talasa talasnog vektora $-\mathbf{k}$ odredjeni su preko vektora polarizacije talasa impulsa $\mathbf{k}$.

Dalje ćemo pretpostaviti da vektorski potencijal zadovoljava periodične uslove:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t, x + L_1, y, z) &= \mathbf{A}(t, x, y, z) \\ \mathbf{A}(t, x, y + L_2, z) &= \mathbf{A}(t, x, y, z) \\ \mathbf{A}(t, x, y, z + L_3) &= \mathbf{A}(t, x, y, z) \ . \end{aligned} \tag{10.8.72}$$

Na prvi pogled uslovi periodičnosti deluju suviše restriktivno. Medjutim, uvek možemo uzeti da L_1, L_2 i L_3 teže beskonačnosti. Ovi uslovi primenjeni na partikularno rešenje (10.8.69) daju diskretan spektar talasnog vektora

$$\mathbf{k} = 2\pi\Big(\frac{n_1}{L_1}\ \frac{n_2}{L_2}\ \frac{n_3}{L_3}\Big) \ , \tag{10.8.73}$$

gde su n_1, n_2 i n_3 celi brojevi. Lako se vidi da je

$$\int_{V_0} \mathrm{d}^3 r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = V_0 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \ , \tag{10.8.74}$$

gde je $V_0 = L_1 L_2 L_3$ zapremina jedne ćelije. Takodje važi

$$\int_{V} \mathrm{d}^3 r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \ , \tag{10.8.75}$$

gde je V zapremina cele šupljine.

Za fiksni talasni vektor $\mathbf{k}$ jednačina (10.8.67) ima četiri nezavisna rešenja

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}) e^{\pm i\omega_k t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ . \tag{10.8.76}$$

Napišimo opšte rešenje talasne jednačine (10.8.67)

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\epsilon_0\omega_k}} \Big(a_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + b_\sigma(-\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(-\mathbf{k}) e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \Big) \ , \tag{10.8.77}$$

gde smo u drugom sabirku napravili smenu $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$. $a_\sigma(\mathbf{k})$ i $b_\sigma(\mathbf{k})$ su koeficijenti. Uslov realnosti vektorskog potencijala daje $b_\sigma(-\mathbf{k}) = a^*_\sigma(\mathbf{k})$. Dakle, vektorski potencijal je

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2V\epsilon_0\omega_k}} \Big(a_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + a^*_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k}) e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \Big) \ . \tag{10.8.78}$$

Iz vektorskog potencijala nalazimo električno polje

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = i \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{2V\epsilon_0}} \Big(a_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}) e^{-i(\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - a^*_\sigma(\mathbf{k}) \boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k}) e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \Big) \ . \tag{10.8.79}$$

Ako sa N obeležimo broj ćelija u šupljini onda je energija električnog polja

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{1}{2}\int_V \mathrm{d}^3 r \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 = \frac{N}{2}\int_{V_0} \mathrm{d}^3 r \varepsilon_0 \mathbf{E}^2 \\ &= -\frac{N}{2}\int_{V_0} \mathrm{d}^3 r \sum_{\sigma,\sigma'}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \frac{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}}{2V}\Big(a_\sigma(\mathbf{k}) a_{\sigma'}(\mathbf{k}')\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma'}(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_k+\omega_{k'})t+i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} \\ &- a_\sigma(\mathbf{k}) a^*_{\sigma'}(\mathbf{k}')\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^*_{\sigma'}(\mathbf{k}') e^{-i(\omega_k-\omega_{k'})t+i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} + c.c.\Big) , \end{aligned} \tag{10.8.80}$$

gde $c.c$ označava kompleksnu konjugaciju. Primenom (10.8.74) i relacija otrogonalnosti za polarizacione vektore dobijamo da je energija električnog polja u šupljini data sa

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\omega_k\Big(a^*_\sigma(\mathbf{k})a_\sigma(\mathbf{k}) - \frac{1}{2}a_\sigma(\mathbf{k})a_\sigma(-\mathbf{k})e^{-2i\omega_k t} - \frac{1}{2}a^*_\sigma(\mathbf{k})a^*_\sigma(-\mathbf{k})e^{2i\omega_k t}\Big) . \tag{10.8.81}$$

Magnetna indukcija je

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = i\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\frac{1}{\sqrt{2V\epsilon_0\omega_k}}\Big(a_\sigma(\mathbf{k})(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}))e^{-i(\omega_k t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} - a^*_\sigma(\mathbf{k})(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k}))e^{i(\omega_k t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}\Big) . \tag{10.8.82}$$

Energija magnetnog polja u šupljini je

$$W_m = \frac{N}{2\mu_0}\int_{V_0}\mathrm{d}^3 r \mathbf{B}^2 . \tag{10.8.83}$$

Nakon pravolinijskog računa uz primenu

$$(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma(\mathbf{k}))\cdot(\mathbf{k}\times\boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k})) = \mathbf{k}^2\boldsymbol{\varepsilon}^*_\sigma(\mathbf{k})\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_{\sigma'}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2\delta_{\sigma\sigma'} \tag{10.8.84}$$

dobijamo

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\omega_k\Big(a^*_\sigma(\mathbf{k})a_\sigma(\mathbf{k}) + \frac{1}{2}a_\sigma(\mathbf{k})a_\sigma(\mathbf{k})e^{-2i\omega_k t} + \frac{1}{2}a^*_\sigma(\mathbf{k})a^*_\sigma(\mathbf{k})e^{2i\omega_k t}\Big) \tag{10.8.85}$$

Energija elektromagnetnog polja u šupljini je

$$W = W_e + W_m = \sum_{\mathbf{k}}\sum_{\sigma=1}^{2}\omega_k a^*_\sigma(\mathbf{k})a_\sigma(\mathbf{k}) . \tag{10.8.86}$$

Uvedimo koordinate

$$\begin{aligned} a_\sigma(\mathbf{k},t) &= a_\sigma(\mathbf{k})e^{i\omega_k t} \\ a^*_\sigma(\mathbf{k},t) &= a^*_\sigma(\mathbf{k})e^{-i\omega_k t} , \end{aligned} \tag{10.8.87}$$

pa energija polja u šupljini postaje

$$W = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} \omega_k a_\sigma^*(\mathbf{k}, t) a_\sigma(\mathbf{k}, t) \ . \tag{10.8.88}$$

Sa koordinata $a_\sigma(\mathbf{k}, t)$ i $a_\sigma^*(\mathbf{k}, t)$ prećićemo na nove (realne) koordinate

$$\begin{aligned} Q_\sigma(\mathbf{k}, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \Big(a_\sigma(\mathbf{k}, t) + a_\sigma^*(\mathbf{k}, t) \Big) \\ P_\sigma(\mathbf{k}, t) &= i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \Big(a_\sigma(\mathbf{k}, t) - a_\sigma^*(\mathbf{k}, t) \Big) \ . \end{aligned} \tag{10.8.89}$$

Prelazak sa kompleksnih koordinata $a_\sigma(\mathbf{k}, t)$ i $ia_\sigma^*(\mathbf{k}, t)$ na $Q_\sigma(\mathbf{k}, t)$ i $P_\sigma(\mathbf{k}, t)$ je kanonska transformacija[4]. Energija elektromagnetnog polja (10.8.86) u ovim koordinatama postaje

$$W = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} (P_\sigma^2(\mathbf{k}, t) + \omega_k^2 Q_\sigma^2(\mathbf{k}, t)) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\sigma=1}^{2} H_{\mathbf{k},\sigma} \ . \tag{10.8.94}$$

Hamiltonijan polja u šupljini smo predstavili kao sumu beskonačno puno energija neintereagujućih harmonijskih oscilatora. Kanonske, tj. Hamiltonove jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} \dot{Q}_\sigma(\mathbf{k}) &= \frac{\partial H_{\mathbf{k},\sigma}}{\partial P_\sigma(\mathbf{k})} = P_\sigma(\mathbf{k}) \\ \dot{P}_\sigma(\mathbf{k}) &= -\frac{\partial H_{\mathbf{k},\sigma}}{\partial Q_\sigma(\mathbf{k})} = -\omega_\sigma^2 Q_\sigma(\mathbf{k}) \ . \end{aligned} \tag{10.8.95}$$

Kombinovanjem ovih jednačina dobijamo

$$\ddot{Q}_\sigma(\mathbf{k}) + \omega_k^2 Q_\sigma(\mathbf{k}) = 0 \ , \tag{10.8.96}$$

---

[4]Transformacija faznih promenljivih

$$\begin{aligned} q_i \to Q_i &= Q_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \\ p_i \to P_i &= P_i(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \end{aligned} \tag{10.8.90}$$

je kanonska ako i samo ako su fundamentalne Poasonove zagrade nepromenjene pri ovim transformacijama. Dakle, iz

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}, \ \{q_i, q_j\} = 0, \ \{p_i, p_j\} = 0 \tag{10.8.91}$$

treba da sledi

$$\{Q_i, P_j\}|_{qp} = \delta_{ij}, \ \{Q_i, Q_j\}|_{qp} = 0, \ \{P_i, P_j\}|_{qp} = 0 \ . \tag{10.8.92}$$

Poasonove zagrade izmedju novih koordinata i impulsa su definsane prema

$$\{Q_i, P_j\}|_{qp} = \sum_{l=1}^{n} \Big(\frac{\partial Q_i}{\partial q_l} \frac{\partial P_j}{\partial p_l} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_l} \frac{\partial P_j}{\partial q_l} \Big) \tag{10.8.93}$$

i analogno za ostale. Druga, ekvivalentna definicija kanonske transformacije je da ona ne menja formu Hamiltonovih jednačina.

tj. $Q_\sigma(\mathbf{k})$ su normalne koordinate.

Pokazali smo da elektromagnetno zračenje u šupljini možemo da predstavimo kao beskonačno, ali prebrojivo mnogo neintereagujućih oscilatora.

Uzmimo da je $L_i \to \infty,\ i = 1, 2, 3$ pa $V_0 \to V$. Broj oscilatora čiji je talasni vektor izmedju $\mathbf{k}$ i $\mathbf{k} + \mathrm{d}\mathbf{k}$ je

$$2\mathrm{d}n_x\mathrm{d}n_y\mathrm{d}n_z = \frac{2V}{(2\pi)^3}\mathrm{d}^3k = 2\frac{Vk^2\mathrm{d}k\mathrm{d}\Omega}{(2\pi)^3}\ . \tag{10.8.97}$$

Faktor 2 je prisutan zbog činjenice da za svaki talasni vektor $\mathbf{k}$ postoje dva oscilatora. Kako je $k = \omega/c$ to je broj oscilatora čije su frekvence u intervalu $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$ dat sa

$$\mathrm{d}n_\omega = \frac{2V\omega^2}{(2\pi)^3c^3}\mathrm{d}\omega\int\mathrm{d}\Omega = \frac{\omega^2V}{\pi^2c^3}\mathrm{d}\omega\ . \tag{10.8.98}$$

Spektar energija kvantnog oscilatora frekvence ω je $\mathcal{E}_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big)$, gde je $n = 1, 2, \ldots$. Konstantni član u izrazu za energiju $n-$tog nivoa oscilatra ćemo ignorisali. Srednja energija oscilatora se lako nalazi u formalizmu kanonskog ansambla na sledeći način

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}_\omega &= \frac{\sum_n \mathcal{E}_n e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}}{\sum_n e^{-\frac{\mathcal{E}_n}{kT}}} = \frac{\sum_n n\hbar\omega e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_n e^{\frac{n\hbar\omega}{kT}}} \\ &= \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\ .\end{aligned} \tag{10.8.99}$$

Odavde je gustine energije oscilatora frekvence u intervalu $(\omega, \omega + \mathrm{d}\omega)$

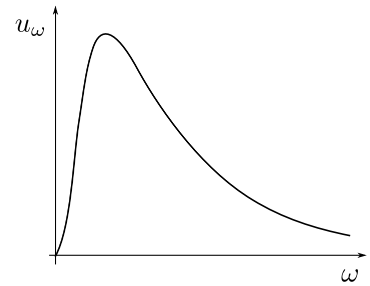
$$\begin{aligned}\mathrm{d}u_\omega &= \frac{\bar{\mathcal{E}}_\omega\mathrm{d}n_\omega}{V} \\ &= \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\mathrm{d}\omega\ .\end{aligned} \tag{10.8.100}$$

Veličina

$$u_\omega(T) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \tag{10.8.101}$$

predstavlja spektralnu gustinu energije. Vidimo da ona zavisi od temperature i frekvence. Dobili smo Plankov zakon zračenja. Plankova kriva je prikazana na slici 10.5. Pri dobijanju Plankovog zračenja prvo smo pokazali da je elektromagnetno polje u šupljini ekvivalentno sistemu neintereagujućih oscilatora, a zatim smo uzeli da su oscilatori kvantni. Integracijom spektralne gustine energije po frekvencama dobijamo gustinu energije elektromagnetnog polja u šupljini

$$\begin{aligned}u(T) &= \int_0^\infty u_\omega(T)\mathrm{d}\omega = \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\int_0^\infty\frac{\omega^3\mathrm{d}\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \\ &= \frac{\hbar}{\pi^2c^3}\Big(\frac{kT}{\hbar}\Big)^4\int_0^\infty\frac{x^3\mathrm{d}x}{e^x - 1} \\ &= \frac{4}{c}\sigma T^4\ .\end{aligned} \tag{10.8.102}$$



Slika 10.5: Plankova kriva

Ovaj rezultat je poznat kao Štefan-Bolcmanov zakon. Primenili smo integral

$$\int_0^\infty \frac{x^3 \mathrm{d}x}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \ . \tag{10.8.103}$$

Konstanta

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}$$

je Štefan-Bolcmanova konstanta. Emisivnost crnog tela predstavlja energiju koju ono izrači u jedinici vremena po jedinici površine normalnoj na pravac emitovanja energije. Emisivnost crnog tela je

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t S_\perp} = \frac{c}{4} u = \sigma T^4 \ . \tag{10.8.104}$$

Glava 11

Retardovani potencijali i zračenja

Prva dva poglavlja ova glave posvećena su nalaženje elektromagnetnih potencijala za proizvoljnu raspodelu vremenski promenljivih gustina naelektrisanja i struja. Ovi potencijali su poznati pod nazivom retardovani potencijali. Rešenje jednačina za potencijale je nadjeno pomoću tzv. retardovane Grinove funkcije za talasnu jednačinu. Daćemo dva načina za nalaženje Grinovih funkcija. Naredna poglavlja posvećena su zračenju sistema naelektrisanja. Prvo je analiziran nerelativistički, a zatim i relativistički slučaj.

11.1 Grinova funkcija. Retardovani potencijali

Četvoropotencijal A^μ u Lorencovoj kalibraciji zadovoljava jednačinu

$$\Box A^\mu = \mu_0 j^\mu \ , \tag{11.1.1}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \triangle\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} &= -\rho/\varepsilon_0 \\ \triangle\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\mu_0\mathbf{j} \ . \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

Skalarni potencijal i Dekartove komponente vektorskog potencijala zadovoljavaju nehomegenu talasnu (Dalamberovu) jednačinu

$$\triangle\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -4\pi f(t,\mathbf{r}) \ , \tag{11.1.3}$$

gde je $\psi = \phi, A_x, A_y, A_z$, a izvor f je proporcionalan sa gustinom naelektrisanja odnosno komponentama gustine struje. Granica oblasti prostora u kojem tražimo rešenje talasne jednačine, $\psi(t,\mathbf{r})$ je u beskonačnosti. Grinova funkcija za ovu jednačinu je definisana jednačinom

$$\Big(\triangle - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big)G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \ , \tag{11.1.4}$$

odnosno

$$\Box_x G(x, x') = 4c\pi\delta^{(4)}(x - x') \ , \tag{11.1.5}$$

gde su $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ i $x'^\mu = (ct', \mathbf{r}')$ četvorovektori položaja.

Lako se vidi da je

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') f(t', \mathbf{r}') + \psi_0(t, \mathbf{r}) \tag{11.1.6}$$

rešenje jednačine (11.1.3), gde je $\psi_0(t, \mathbf{r})$ rešenje homogene talasne jednačine.

Funkcije $\psi(t, \mathbf{r})$ i $f(t, \mathbf{r})$ ćemo spektralno razložiti

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \psi_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \ , \tag{11.1.7}$$

odnosno

$$f(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega f_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \ . \tag{11.1.8}$$

Zamenom u (11.1.3) dobijamo

$$\left(\triangle + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\psi_\omega(\mathbf{r}) = -4\pi f_\omega(\mathbf{r}) \ . \tag{11.1.9}$$

Furijeove amplitude $\psi_\omega(\mathbf{r})$ zadovoljavaju nehomogenu Helmholcovu jednačinu. Grinova funkcija, $G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ za ovu jednačinu je definisana jednačinom

$$\left(\triangle + k^2\right) G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{11.1.10}$$

gde je $k = \omega/c$. Zbog translacione invarijantnosti Grinova funkcija $G_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ zavisi od razlike vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$, tj. od $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Zbog sferne simetrije Grinova funkcija zavisi samo od intenziteta vektora $\mathbf{R}$. Jednačina (11.1.10) postaje

$$\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}R^2}(RG_k) + k^2 G_k = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{R}) \ . \tag{11.1.11}$$

U oblasti $\mathbf{R} \neq 0$ rešenje ove jednačine je

$$G_k(R) = A\frac{e^{ikR}}{R} + B\frac{e^{-ikR}}{R} \ , \tag{11.1.12}$$

gde su A i B integracione konstante. Delta funkcija na desnoj strana jednačine (11.1.11) je značajna za malo R.

Za $k = 0$ jednačina (11.1.10) postaje jednačina za Grinovu funkciju u statičkom slučaju pa je

$$G_0 = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{R} \ . \tag{11.1.13}$$

Odavde zaključujemo da je $A+B=1$. Rešenje nehomogene Helmholcove jednačine (11.1.9) je

$$\psi_\omega(\mathbf{r}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' G_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}') f_\omega(\mathbf{r}') \tag{11.1.14}$$

pa je rešenje nehomogene talasne jednačine (11.1.3) dato sa

$$\begin{aligned}
\psi(t,\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \psi_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' G_k(\mathbf{r},\mathbf{r}') f_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\omega t} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' f(t',\mathbf{r}') \int \mathrm{d}\omega G_k(\mathbf{r}-\mathbf{r}') e^{i\omega(t'-t)} \; .
\end{aligned} \tag{11.1.15}$$

Poredjenjem sa (11.1.6) dobijamo Grinovu funkciju za nehomogenu talasnu jednačinu

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega G_k(\mathbf{r},\mathbf{r}') e^{i\omega(t'-t)} \; . \tag{11.1.16}$$

Dva partikularna rešenja jednačine (11.1.10)

$$G_k^{(\pm)}(R) = \frac{e^{\pm ikR}}{R} \tag{11.1.17}$$

daju dve partikularne Grinove funkcije za nehomogenu Dalamberovu jednačinu. One su date sa

$$\begin{aligned}
G^{(\pm)}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{\pm ikR}}{R} e^{i\omega(t'-t)} \\
&= \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\Big(t' - (t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})\Big) \; .
\end{aligned} \tag{11.1.18}$$

Njihova linearna kombinacija

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = AG^{(+)}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') + (1-A)G^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') \tag{11.1.19}$$

je takodje Grinova funkcija. Izbor konstante A odredjen je graničnim uslovom.

Analizirajmo prvo Grinovu funkciju $G^{(+)}$, tj. slučaj $A=1$. Odgovarajuće polje $\psi^{(+)}$ je dato sa

$$\begin{aligned}
\psi^{(+)}(t,\mathbf{r}) &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \mathrm{d}t' \frac{\delta\Big(t' - (t - \frac{R}{c})\Big)}{R} f(t',\mathbf{r}') + \psi_{in}(t,\mathbf{r}) \\
&= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \psi_{in}(t,\mathbf{r}) \; .
\end{aligned} \tag{11.1.20}$$

U ovom izrazu sa $\psi_{in}(t,\mathbf{r})$ obeležili smo homogeno rešenje. Iz oblika rešenja (11.1.20) vidimo da je vrednost polja $\psi^{(+)}$ u trenutku t u tački $\mathbf{r}$ odredjena sa vrednošću izvora f u tačkama $\mathbf{r}'$

u trenutku vremena $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. Ovaj vremenski trenutak je pre trenutka t, tačno za vreme koje je potrebno signalu da stigne iz tačke $\mathbf{r}'$ u $\mathbf{r}$. Grinova funkcija $G^{(+)}$ naziva se retardovanom Grinovom funkcijom. Retardovana Grinova funkcija je za $t < t'$ jednaka je nuli. Fizički smisao rešenja (11.1.20) je da u dalekoj prošlosti, $t \to -\infty$ imamo inicijalni talas ψ_{in}. Granični uslov

$$\psi(t,\mathbf{r}) \to \psi_{in}(t,\mathbf{r}), \quad \text{kad} \quad t \to -\infty \ , \tag{11.1.21}$$

je tzv. retardovani granični uslov. Primena retardovanih graničnih uslova je u skladu sa našim shvatanjem kauzalnosti u klasičnoj fizici.

Grinova funkcija $G^{(-)}$ se naziva advansiranom Grinovom funkcijom. Polje $\psi^{(-)}(t,\mathbf{r})$ je dato sa

$$\begin{aligned}\psi^{(-)}(t,\mathbf{r}) &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t' \frac{\delta\Big(t' - (t + \frac{R}{c})\Big)}{R} f(t',\mathbf{r}') + \psi_{out}(t,\mathbf{r}) \\ &= \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}+\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \psi_{out}(t,\mathbf{r}) \ .\end{aligned} \tag{11.1.22}$$

U trenutku t u tački $\mathbf{r}$ polje $\psi^{(-)}(t,\mathbf{r})$ odredjeno je vrednošću izvora u kasnijem trenutku vremena $t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}$. Zato se ova funkcija naziva advansiranom. Za $t \to \infty$ ona je jednaka nuli. Advansirirani granični uslov je

$$\psi(t,\mathbf{r}) \to \psi_{out}(t,\mathbf{r}), \quad \text{kad} \quad t \to \infty \ , \tag{11.1.23}$$

što znači da u dalekoj budućnosti imamo talas ψ_{out}. Rešenje sa advansiranom Grinovom funkcijom je

$$\psi^{(-)}(t,\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' G^{(-)}(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') f(t',\mathbf{r}') + \psi_{out}(t,\mathbf{r}) \ . \tag{11.1.24}$$

U klasičnoj elektrodinamici koristimo retardovane granične uslove, jer je time očuvana kauzalnost. Retardovani potencijali elektromagnetnog polja su

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\ \mathbf{A}(t,\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \ .\end{aligned} \tag{11.1.25}$$

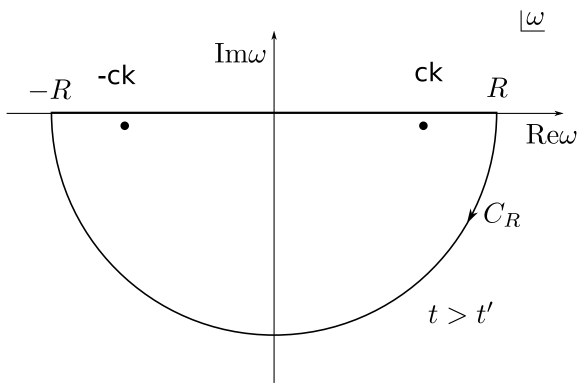
11.2 *Alternativno izvodjenje Grinove funkcije

U ovoj lekciji naćićemo Grinovu funkciju za talasnu jednačinu na još jedan način. Grinova funkcija $G(x,x')$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\Box_x G(x,x') = 4\pi c \delta^{(4)}(x - x') \ . \tag{11.2.26}$$

Grinovu funkciju i četvorodimenzionu delta funkciju razložićemo u Furijeove integrale prema

$$\begin{aligned}G(x,x') &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \tilde{G}(k) e^{-ik(x-x')} \\ \delta^{(4)}(x-x') &= \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-x')} \ .\end{aligned} \tag{11.2.27}$$



Slika 11.1:

$\tilde{G}(k)$ je Furijeova amplituda Grinove funkcije. Granica oblasti prostor-vremena je u beskonačnosti pa zbog translacione simetrije Grinova funkcija zavisi od razlike $x - x'$. Takodje uzećemo da je $k^\mu = (\frac{\omega}{c}, \mathbf{k})$ pa je $k \cdot x = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$. Iz prethodnih jednačina sledi da je Furijeova amplituda Grinove funkcije odredjena jednačinom

$$k^2 \tilde{G}(k) = -4\pi c \tag{11.2.28}$$

odnosno

$$\Big(\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2)\tilde{G}(k\Big) = -4\pi c \ . \tag{11.2.29}$$

Prema tome imamo

$$\tilde{G}(k) = -\frac{4\pi c}{\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2} \ . \tag{11.2.30}$$

Zamenom ovog izaraza u izraz za Grinovu funkciju dobijamo

$$G(x - x') = -4\pi c^3 \int \frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik(x-x')}}{\omega^2 - c^2\mathbf{k}^2} \ , \tag{11.2.31}$$

odnosno

$$G(x - x') = -4\pi c^2 \int_{R^3} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}\,')} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega^2 - c\mathbf{k}^2} \ . \tag{11.2.32}$$

Integral po promenljivoj ω je divergentan zato što podintegralna funkcija ima polove u tačkama $\omega = \pm c|\mathbf{k}|$. Imamo dve opcije ili da zaboravimo integral (11.2.32) ili da ga dobro definišemo. Gornji integral ćemo razmatrati kao integral u kompleksnoj ω ravni. Polove $\pm c|\mathbf{k}|$ ćemo infinitezimalno pomeriti sa realne ose. Ovo se postiže zamenom $\omega \to \omega + i\epsilon$ u imeniocu integrala (11.2.32). Dakle umesto (11.2.32) imamo

$$G(x, x') = -4\pi c^2 \int_{R^3} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}\,')} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega + i\epsilon)^2 - c\mathbf{k}^2} \ , \tag{11.2.33}$$

gde $\epsilon \to 0$. Ovaj integral je konvergentan. Polovi su u tačkama $\omega = \pm c|\mathbf{k}| - i\epsilon$ i oba su u donjoj komleksnoj $\omega-$ravni. Za $t > t'$ konturu integracije dopunjujemo u donjoj poluravni, a za $t < t'$ u gornjoj poluravni, što je prikazano na slici 11.1. Ovakav izbor je vezan za ponašanje eksponenta $e^{-i(Re\omega+iIm\omega)(t-t')}$ za veliko $|\omega|$. Primenom Košijeve teoreme za $t < t'$ vidimo da je $G(x-x') = 0$, jer u oblasti integracije nema polova i integral po C_R teži nuli. Razmotrimo sada drugi slučaj, $t > t'$. Neka se kontura integracije sastoji od integracije od $-R$ do R po realnoj ω osi i polukrugu, C_R. U oblasti integracije se nalaze dva pola. Takodje, lako se vidi da u limesu $R \to \infty$ integral po polukrugu jednak nuli. Primenom Košijeve teoreme imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega+i\epsilon)^2 - c\mathbf{k}^2} &= -2\pi i \Big(\mathrm{Res}_{c|\mathbf{k}|} + \mathrm{Res}_{-c|\mathbf{k}|} \Big) \theta(t-t') \\ &= -2\pi i \Big(\frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck} - \frac{e^{ick(t-t')}}{2ck} \Big) \theta(t-t') \ . \end{aligned} \tag{11.2.34}$$

Ovaj izraz ćemo zameniti u (11.2.33). Dalje ćemo integraliti po $\mathbf{k}$, prelaskom na sferne koordinate u $\mathbf{k}$ prostoru. Integracijom po sfernim uglovima dolazimo do

$$\begin{aligned} G(x-x') &= \frac{c}{2\pi R} \int_0^{\infty} \mathrm{d}k \Big(e^{ik(R-c(t-t'))} - e^{ik(R+c(t-t'))} \\ &- e^{-ik(R+c(t-t'))} + e^{ik(-R+c(t-t'))} \Big) \theta(t-t') \ . \end{aligned} \tag{11.2.35}$$

Gornji integral se može prepisati u obliku

$$G(x-x') = \frac{c}{2\pi R} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \Big(e^{-ik(R-c(t-t'))} - e^{ik(R+c(t-t'))} \Big) \theta(t-t') \ , \tag{11.2.36}$$

pa je

$$G(x-x') = \frac{c}{R} \Big(\delta(R - c(t-t')) - \delta(R + c(t-t')) \Big) \theta(t-t') \ . \tag{11.2.37}$$

Druga delta funkcija je jednaka nuli pa je

$$G(x-x') = \frac{\delta\Big(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} - t + t' \Big)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \theta(t-t') \ . \tag{11.2.38}$$

Dobili smo retardovanu Grinovu funkciju. Ona se može prepisati u kovarijantnom obliku

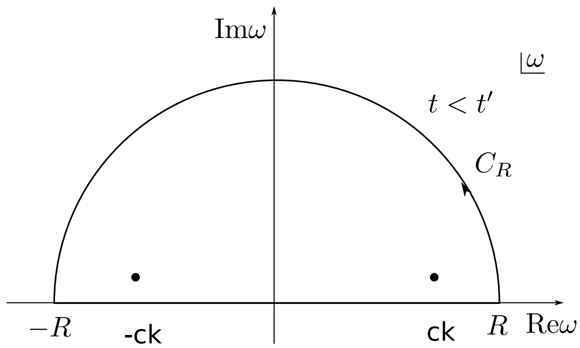
$$G^{(+)}(x-x') = 2c\delta^{(4)}((x-x')^2)\theta(t-t') \ . \tag{11.2.39}$$

Analogno, smenom $\omega \to \omega - i\epsilon$ polove pomeramo u gornju poluravani, pa tako dobijamo advansiranu Grinovu funkciju

$$G^{(-)}(x,x') = -4\pi c^2 \int_{R^3} \frac{\mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - i\epsilon)^2 - c\mathbf{k}^2} \ . \tag{11.2.40}$$

Primenom Košijeve teoreme imamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega+i\epsilon)^2 - c\mathbf{k}^2} &= 2\pi i \Big(\mathrm{Res}_{c|\mathbf{k}|} + \mathrm{Res}_{-c|\mathbf{k}|} \Big) \theta(t'-t) \\ &= 2\pi i \Big(\frac{e^{-ick(t-t')}}{2ck} - \frac{e^{ick(t-t')}}{2ck} \Big) \theta(t'-t) \ . \end{aligned} \tag{11.2.41}$$



Slika 11.2:

Zamenom ovog rezultata u (11.2.40) nakon integracije po $\mathbf{k}$ dobijamo

$$G^{(-)}(x,x') = \frac{c}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\Big(\delta(c(t-t')+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - \delta(c(t-t')-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\Big)\theta(t'-t)\ . \qquad (11.2.42)$$

Druga delta funkcija je nula pa je advansirana Grinova funkcija data sa

$$G^{(-)}(x,x') = \frac{\delta\Big(t-t'+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\Big)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\theta(t'-t)\ . \qquad (11.2.43)$$

11.3 Polje na velikim rastojanjima

Neka se sistem pokretnih naelektrisanih čestica nalazi u ograničenom delu prostora. Linearne dimenzije sistema su reda veličine d. Ova naelektrisanja generišu promenljivo elektromagnetno polje. Potencijali ovog polja su dati izrazima (11.1.25). Kao i u slučaju statičkih polja ispitaćemo karakteristike ovog polja na velikim rastojanjima od izvora, odnosno primenićemo aproksimaciju $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'| \sim d$. Tada je

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'\ , \qquad (11.3.44)$$

gde je $\mathbf{n} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$ jedinični vektor usmeren iz koordinatnog početka ka tački posmatranja. U imeniocu izraza za potencijale (11.1.25) faktor $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ zamenićemo sa vodećim članom r. Isti ovaj faktor se pojavljuje u brojiocu izraza za potencijale i to u argumentu gustine naelektrisanja odnosno struje. Tu ćemo ga aproksimirati na sledeći način

$$t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \approx t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c} = \tau + \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c}\ , \qquad (11.3.45)$$

gde je

$$\tau = t - \frac{r}{c}\ . \qquad (11.3.46)$$

Vreme τ je manje od t za vreme koje je potrebno da signal stigne iz koordinatnog početka do tačke $\mathbf{r}$. U brojiocu podintegralne funkcije zadržavamo član $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'/c$, a u imeniocu integranda ga zanemarujemo. Objašnjenje za ovaj postupak je u sledećem. Član $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'/c$ je reda d/c i on predstavlja vreme za koje signal stigne sa jednog na drugi kraj sistema. Za to vreme gustine naelektrisanja i struje mogu značajno da se promene, pa nije opravdano da taj član zanemarimo. Iz (11.1.25) sledi da su na velikim rastojanjima od sistema potencijali dati sa

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{r}) &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\rho\Big(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\\ \mathbf{A}(t,\mathbf{r}) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\ . \end{aligned} \tag{11.3.47}$$

Vodeći član u razvoju potencijala je oblika $1/r$. Koristeći izraze za potencijale odredićemo polja $\mathbf{E}$ i $\mathbf{B}$ na velikim rastojanjima od izvora. Polja će takodje biti oblika $1/r$, pa se na velikim rastojanjima od izvora Pointingov vektor ponaša kao $1/r^2$. Fluks Pointingovog vektora na velikim rastojanjima biće nenulti, jer se površina ponaša kao r^2. To znači da sistem naelektrisanih čestica emituje elektromagnetne talase, tj. zrači. Magnetna indukcija je

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0)\ , \tag{11.3.48}$$

gde smo uveli oznaku $t_0 = t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}$. Pri uzimanju rotora vektorskog potencijala odbacili smo član tipa $1/r^2$. Lako se vidi da je

$$\frac{\partial t_0}{\partial x_i} = -\frac{x_i}{cr}+\frac{x_i'}{cr}-\frac{x_i}{cr}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2}, \tag{11.3.49}$$

gde su x_i i x_i' Dekartove koordinate vektora $\mathbf{r}$ odnosno $\mathbf{r}'$, pa je

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0) &= \sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial j_k(\mathbf{r}',t_0)}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial x_j}\mathbf{e}_i\\ &= -\frac{1}{cr}\mathbf{r}\times\frac{\partial \mathbf{j}(\mathbf{r}',t_0)}{\partial t_0}\ . \end{aligned} \tag{11.3.50}$$

Zadržali smo samo vodeći član u prethodnom izrazu. Zamenom (11.3.50) u izraz za magnetnu indukciju dobijamo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathbf{n}}{cr}\times\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\ . \tag{11.3.51}$$

Sličnim postupkom odredićemo i električno polje na velikim rastojanjima od sistema. Lako se vidi da je

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big) \tag{11.3.52}$$

i

$$\begin{aligned}\nabla\phi &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial\rho(\mathbf{r}',t_0)}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\\ &\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\mathbf{r}}{r^2}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}+\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\ . \end{aligned} \tag{11.3.53}$$

Prema tome električno polje je

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{\mathbf{r}}{r^2}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\rho\Big(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big) - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\ . \tag{11.3.54}$$

Dalje ćemo transformisati prvi član u izrazu za električno polje izražavajući gustinu naelektrisanja preko gustine struje, primenom jednačine kontinuiteta. Naime,

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t} = \frac{\partial\rho(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0} = -\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0)\Big|_{t_0}\ . \tag{11.3.55}$$

Sa $..\Big|_{t_0}$ označili smo da se pri izračunavanju divergencije uzima da je t_0 konstantno. Očigledno je da je

$$\begin{aligned}\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0) &= \sum_i\Big(\frac{\partial j_i(\mathbf{r}', t_0)}{\partial x_i'}\Big|_{t_0} + \frac{\partial j_i(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0}\frac{\partial t_0}{\partial x_i'}\Big) \\ &= \mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0)\Big|_{t_0} + \frac{\mathbf{r}}{cr}\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0}\ .\end{aligned} \tag{11.3.56}$$

Kombinovanjem (11.3.55) i (11.3.56) dobijamo

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t} = -\mathrm{div}'\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\mathbf{r}}{cr}\frac{\partial\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0}\ . \tag{11.3.57}$$

Izraz (11.3.57) ćemo zameniti u (11.3.54). Integral člana koji sadrži divergenciju gustine struje jednak je, po Gausovoj teoremi nuli. Tako dobijamo

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{n}}{r}\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{n}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big) - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\ . \tag{11.3.58}$$

Primenom vektorskog identiteta $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v} = \mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{v})$ dobijamo

$$\mathbf{E} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\mathbf{n}\times\Big(\mathbf{n}\times\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{j}\Big(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\Big)\Big)\ . \tag{11.3.59}$$

Električno i magnetno polje na velikim rastojanjima od sistema su dati izrazima (11.3.51) odnosno (11.3.59). Oni su oblika $1/r$, što znači da sistem zrači elektromagnetne talase. Odmah vidimo da važi

$$\mathbf{E} = c(\mathbf{B}\times\mathbf{n})\ , \tag{11.3.60}$$

što je karakteristično za ravan elektromagnetni talas. Na osnovu geometrije problema je jasno da su emitovani talasi sferni, ali na velikim rastojanjima od izvora oni su približno ravni.

Važno je naglasiti da je u aproksimaciji koju primenjujemo dovoljno da nadjemo vektorski potencijal. Iz njega se zatim nalazi magnetno polje, a električno se dobija primenom veze sa magnetnim poljem karakterističnom za ravne talase.

11.4 Talasna zona-dipolna aproksimacija

Pretpostavićemo da je vreme d/c mnogo manje od vremena T koje karakteriše vremenske promene funkcija ρ i $\mathbf{j}$. Za harmonijske izvore vreme T je period, a u opštem slučaju to je vreme za koje se gustina naelektrisanja odnosno struje znatno izmene. Inverzna veličina $1/T = \nu$ je karakteristična frekvenca. Dakle, uzimamo da je

$$\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c} \sim \frac{d}{c} \ll T \sim \frac{1}{\nu}\ , \tag{11.4.61}$$

odnosno

$$d \ll cT = \lambda\ . \tag{11.4.62}$$

Karakteristična dimenzija sistema je mnogo manje od talasne dužine na kojoj sistem dominantno zrači. Iz $d/c \ll T = d/v$, gde je v srednja brzina kretanja naelektrisanih čestica sistema, sledi

$$v \ll c\ . \tag{11.4.63}$$

Aproksimacija koju smo uveli je pretpostavka da se čestice sistema kreću nerelativističkim brzinama. Kombinovanjem dve aproksimacije: $d \ll r$ i $d \ll \lambda$ dobijamo tri moguće oblasti u prostoru:
1. $d \ll \lambda \ll r$-talasna (udaljena) zona,
2. $d \ll \lambda \sim r$-medjuzona,
3. $d \ll r \ll \lambda$- bliska (statička) zona.
U talasnoj zoni primenom ove dve aproksimacije izrazi za potencijale (11.1.25) postaju

$$\phi(t,\mathbf{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\rho(\tau,\mathbf{r}') + \frac{\partial\rho}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c}\Big)^2\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}\Big|_{t=\tau}\Big)\ , \tag{11.4.64}$$

odnosno

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\Big(\mathbf{j}(\tau,\mathbf{r}') + \frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}\Big|_{t=\tau}\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}'}{c}\Big)^2\frac{\partial^2\mathbf{j}}{\partial t^2}\Big|_{t=\tau}\Big)\ . \tag{11.4.65}$$

Izraz za skalarni potencijal nećemo koristiti jer smo već rekli da polja možemo odrediti na osnovu izraza za vektorski potencijal. U prvom članu u razvoju vektorskog potencijala (11.4.65) pojavljuje se integral

$$\int_V \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}(\tau,\mathbf{r}')\ , \tag{11.4.66}$$

koji ćemo dalje transformisati. Podjimo od

$$0 = \int_V \mathrm{d}^3r'\mathrm{div}'(x'_i\mathbf{j}) = \int_V \mathrm{d}^3r'(x'_i\mathrm{div}'\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\mathbf{e}_i) \tag{11.4.67}$$

odakle je

$$\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{j}_i = -\int \mathrm{d}^3r'x'_i\mathrm{div}'\mathbf{j} = \int \mathrm{d}^3r'x'_i\frac{\partial\rho}{\partial t}\Big|_\tau\ , \tag{11.4.68}$$

gde smo primenili jednačinu kontinuiteta. Najniži član u vektorskom potencijalu je prema tome

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(1)}(t,\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int \mathrm{d}^3r'\ \mathbf{r}'\frac{\partial\rho(t,\mathbf{r}')}{\partial t}\Big|_{t=\tau} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\dot{\mathbf{p}}(\tau)}{c^2 r}\ , \end{aligned} \tag{11.4.69}$$

gde je $\mathbf{p}$ električni dipolni moment sistema. Sada ćemo izračunati polja u ovoj aproksimaciji. Magnetno polje je

$$\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \mathrm{rot}\mathbf{A}^{(1)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\mathrm{rot}\Big(\frac{\dot{\mathbf{p}}(\tau)}{r}\Big)\ . \tag{11.4.70}$$

Primenom

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\dot{\mathbf{p}}(\tau) &= \epsilon_{ijk}\partial_j\dot{p}_k(\tau)\mathbf{e}_i \\ &= -\frac{1}{cr}\epsilon_{ijk}\ddot{p}_k(\tau)x_j\mathbf{e}_i \\ &= \frac{1}{cr}\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{r}\ , \end{aligned} \tag{11.4.71}$$

dobijamo

$$\mathbf{B}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n}}{r}\ . \tag{11.4.72}$$

Primenom (11.3.60) dobijamo električno polje

$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{r}\ . \tag{11.4.73}$$

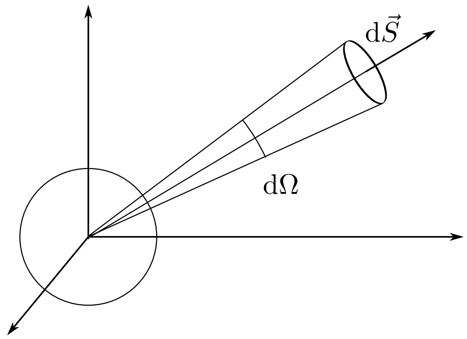
Električno i magnetno polje na velikim rastojanjima se ponašaju kao $1/r$ i odredjeni su sa električnim dipolnim momentom sistema naelektrisanih čestica. Zbog toga se ova aproksimacija naziva dipolnom. Ravan talas u ovoj oblasti prostora je aproksimacija sfernog talasa emitovanog od naelektrisanja. Sistem zrači elektromagnetne talase i zato se ova oblast prostora naziva talasnom zonom.

Pointingov vektor u talasnoj zoni je

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_p &= \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{c}{\mu_0}\mathbf{B}^2\mathbf{n} \\ &= \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2 c^5\mu_0}\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})^2}{r^2}\mathbf{n}\ . \end{aligned} \tag{11.4.74}$$

Element površine (slika 11.3) na rastojanju r od koordinatnog početka je $\mathrm{d}\mathbf{S} = r^2\mathrm{d}\Omega\mathbf{n}$, gde je $\mathrm{d}\Omega$ prostorni ugao. Energija koja u jedinici vremena prodje kroz ovu infinitezimalno malu površ u talasnoj zoni je

$$\mathrm{d}P = \mathbf{S}_p\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})^2}{4\pi}\mathrm{d}\Omega\ . \tag{11.4.75}$$



Slika 11.3:

Izračena snaga (ili intenzitet zračenja) u jedinični prostorni ugao u dipolnoj aproksimaciji je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})^2}{4\pi} \ . \tag{11.4.76}$$

Primenom ove formule možemo odrediti angularnu raspodelu snage zračenja jedne naelektrisane čestice, q. Dipolni moment u ovom slučaju je $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$, pa je uglovna raspodela snage zračenja data sa

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} \sim |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2\theta \ , \tag{11.4.77}$$

gde je θ ugao izmedju ubrzanja čestice i orta $\mathbf{n}$. Vidimo da naelektrisana čestica zrači ako se kreće ubrzano.

Integracijom uglovne raspodele snage zračenja po celom prostornom uglu dobija se ukupna snaga (intenzitet) zračenja

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \sin\theta(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})^2 \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}|\ddot{\mathbf{p}}(\tau)|^2 \ . \end{aligned} \tag{11.4.78}$$

Dobili smo tzv. Larmorovu formulu. Rezultat je naravno nadjen u dipolnoj aproksimaciji. Pri integraciji u prethodnoj formuli koristili smo

$$(\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n})^2 = \ddot{\mathbf{p}}^2 - (\ddot{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{n})^2 \tag{11.4.79}$$

i integrale

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta = 4\pi \tag{11.4.80}$$

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta n_i n_j = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij} \ , \tag{11.4.81}$$

gde su n_i Dekartove koordinate orta $\mathbf{n}$.

Primer 1. Klasičan elektronski gas koncentracije n_0 nalazi se u spoljašnjem magnetnom polju $\mathbf{B}$. Raspodela elektrona po brzinama data je Maksvelovom raspodelom. Temperatura gasa je T. Srednje rastojanje izmedju elektrona je veliko u poredjenju sa talasnom dužinom emitovanog zračenja. Odrediti intenzitet zračenja jedinice zapremine gasa u dipolnoj aproksimaciji.
Rešenje: Jednačina kretanja elektrona je $m\ddot{\mathbf{r}} = -ev_\perp B$, gde je $v_\perp$ normalna projekcija brzine elektrona. Uzećemo da je magnetno polje usmereno duž $z-$ose. Snaga zračenja od jednog elektrona je, po Larmorovoj formuli, data sa

$$P_1 = \frac{e^4 v_\perp^2 B^2}{6\pi\epsilon_0 m^2} \ . \tag{11.4.82}$$

Koncentracija elektrona čija je brzina u intervalu $(v, v+\mathrm{d}v)$, odredjena je Maksvelovom raspodelom

$$\mathrm{d}n(v) = n_0\Big(\frac{m}{2\pi kT}\Big)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \mathrm{d}v_x \mathrm{d}v_y \mathrm{d}v_z \ . \tag{11.4.83}$$

Kako je $v^2 = v_\perp^2 + v_z^2$ to je $\mathrm{d}v_x\mathrm{d}v_y = 2\pi v_\perp \mathrm{d}v_\perp$, to je koncentracija elektrona čije su brzine u intervalu $(v_\perp, v_\perp + \mathrm{d}v_\perp)$ data sa

$$\begin{aligned} \mathrm{d}n(v_\perp) &= n_0\Big(\frac{m}{2\pi kT}\Big)^{3/2} e^{-\frac{mv_\perp^2}{2kT}} 2\pi v_\perp \mathrm{d}v_\perp \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}v_z e^{-\frac{mv_z^2}{2kT}} \\ &= \frac{n_0 m v_\perp}{kT} e^{-\frac{mv_\perp^2}{2kT}} \mathrm{d}v_\perp \ . \end{aligned} \tag{11.4.84}$$

Ukupna izračena snaga po jedinici zapremine je onda

$$P = \int P_1 \mathrm{d}n(v_\perp) = \frac{e^4 B^2 n_0}{6\pi\epsilon_0 mkT} \int_0^\infty v_\perp^3 e^{-\frac{mv_\perp^2}{2kT}} \mathrm{d}v_\perp \ . \tag{11.4.85}$$

Nakon integracije dobijamo

$$P = \frac{e^4 B^2 n_0}{3\pi\epsilon_0 m^3} kT \ . \tag{11.4.86}$$

Primer 2. Pokazati (11.4.81) i

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta n_i n_j n_k = 0 \\ &\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta n_i n_j n_k n_p = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{kp} + \delta_{ik}\delta_{jp} + \delta_{ip}\delta_{jk}) \ . \end{aligned} \tag{11.4.87}$$

Rešenje: Svi integrali su trodimenzionalni tenzori odgovarajućeg ranga koji ne zavise od sfernih uglova. Izraz (11.4.81) je simetričan tenzor drugog reda, pa jedino može biti proporcionalan Kronekerovoj delti, tj.

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin\theta n_i n_j = C\delta_{ij} \ ,$$

gde je C konstanta. Ovu konstantu možemo dobiti ako npr. fiksiramo indekse $i = j = 3$ i izračunamo integral. Preostali identiteti se slično pokazuju.

Odredimo sada impuls koji sistem naelektrisanih čestica izrači. Polazna tačka je teorema impulsa. Promena ukupnog impulsa unutar neke oblasti u jedinici vremena data je sa

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{P}_{\mathrm{meh}} + \mathbf{P}_f) = \oint_S T \mathrm{d}\mathbf{S} \ , \tag{11.4.88}$$

gde je T Maksvelov tenzor napona. Koristeći činjenicu da je u talasnoj zoni polje ortogonalno na vektor $\mathbf{n}$ jedini doprinos izračenom impulsu potiče od člana sa gusinom energije elektromagnetnog polja u tenzoru napona. Tako dobijamo da je izračeni impuls dat sa

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \int r^2 \frac{1}{c} |\mathbf{S}_\mathbf{p}| \mathbf{n} \mathrm{d}\Omega \ . \tag{11.4.89}$$

Sa druge strane mi znamo da je angularna distribucija snage zračenja data sa

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = r^2 |\mathbf{S}_\mathbf{p}| \ , \tag{11.4.90}$$

pa je

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{P}}{\mathrm{d}t} = \int \frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} \mathbf{n} \mathrm{d}\Omega \ . \tag{11.4.91}$$

Zamenom izraza za angularnu distribuciju snage dipolnog zračenja (11.4.76) dobijamo da je izračeni impuls jednak nuli.

11.5 Spektralna raspodela zračenja

U ovom poglavlju analiziraćemo spektralne karakteristike zračenja. Umesto da odredjujemo energiju koju sistem izrači u jedinici vremena, u ovom paragrafu, odredićemo izračenu energiju po jediničnom intervalu frekvenci.

Vektorski potencijal na rastojanjima znatno većim od dimenzija sistema dat je sa (11.3.47). Furijeova amplituda vektorskog potencijala odredjena je sa

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathbf{A}(t, \mathbf{r}) e^{i\omega t} \ . \tag{11.5.92}$$

Zamenom izraza za vektorski potencijal iz formule (11.3.47) u (11.5.92) nalazimo

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \int \mathrm{d}^3 r' \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} \ , \tag{11.5.93}$$

gde smo uveli vektor propagacije $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$. Izraz (11.5.93) postaje

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i\omega r/c}}{r} \mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}} \ , \tag{11.5.94}$$

gde je $\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}$ Furijeov transform gustine struje i u prostoru i u vremenu. Furijeova amplituda magnetnog polja se dobija Furijeovom transformacijom u izrazu (11.3.51). Rezultat je

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\omega}{c}\frac{e^{i\omega r/c}}{r}\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}} \times \mathbf{n} \ . \tag{11.5.95}$$

Furijeove amplitude vektorskog potencijala i magnetnog polja se, za velika rastojanja od sistema, ponašaju kao $1/r$ i zavise od spektralnih karakteristika izvora. Skalarni potencijal i električno polje se dobijaju analogno. Za dalju analizu oni nam nisu bitni. Sledeći korak bi bio uvodjenje aproksimacije $\omega d/c \ll 1$ u eksponentu podintegralnig izraza (11.5.93). To izvodjenje ćemo ovde izostaviti, jer su rezultati analogni rezultatima iz prethodnog paragrafa. Spektralne karakteristike zračenja dobićemo iz krajnjih rezultata za izračenu uglovnu raspodelu snage.

Ukupna energija koja se u pravcu orta $\mathbf{n}$ izrači u prostorni ugao $\mathrm{d}\Omega$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{S}_p(t,\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}r^2\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{\mu_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathbf{B}^2(t,\mathbf{r})r^2\mathrm{d}\Omega \ . \tag{11.5.96}$$

Da bismo ovaj izraz dalje transformisali, izvešćemo jednu pomoćnu formulu. Neka je $F = F(t)$ realna funkcija vremena. Furijeovom transformacijom ove funkcije imamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t|F(t)|^2 &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega' F_\omega F^*_{\omega'}e^{-i\omega t+i\omega' t}\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega F_\omega F^*_\omega\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|F_\omega|^2\mathrm{d}\omega \ .\end{aligned} \tag{11.5.97}$$

U zadnjem redu koristili smo da činjenicu da je funkcija $F(t)$ realna, pa je $F^*_\omega = F_{-\omega}$. Primenom (11.5.97), izraz (11.5.96) postaje

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathbf{S}_p(t,\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}r^2\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega r^2\frac{c}{\mu_0\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega|\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r})|^2 \ , \tag{11.5.98}$$

gde smo sa integracije po vremenu prešli na integraciju po frekvencama. Totalnu izračenu energiju u pravcu $\mathbf{n}$ predstavićemo u obliku

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathbf{S}_p(t,\mathbf{r})\cdot\mathbf{n}r^2\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\Omega\int_0^{\infty}\mathrm{d}\omega\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} \ . \tag{11.5.99}$$

Poredjenjem vidimo da je

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^3 c}\omega^2|\mathbf{j}_{\omega,\mathbf{k}}\times\mathbf{n}|^2 \ . \tag{11.5.100}$$

Ovaj izraz predstavlja spektralnu distribuciju izračene energije po jediničnom prostornom uglu, tj. izračenu energiju po jediničnom intervalu frekvenci i po prostornom uglu u smeru orta $\mathbf{n}$. U daljem izlaganju ograničićemo se na električno dipolno zračenje. Električni dipolni moment sistema ćemo spektralno da razložimo

$$\mathbf{p}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\mathbf{p}_\omega e^{-i\omega t} \ , \tag{11.5.101}$$

pa je

$$\ddot{\mathbf{p}}(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\omega^2 \mathbf{p}_\omega e^{-i\omega t} \ . \tag{11.5.102}$$

Pointingov vektor u talasnoj zoni i u dipolnoj aproksimaciji dat je izrazom (11.4.74). Ponavljajući proceduru iz prvog dela ovog paragrafa dobijamo spektralnu disprtibuciju dipolnog zračenja

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}}{\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{16\pi^3\epsilon_0 c^3}\omega^4|\mathbf{p}_\omega \times \mathbf{n}|^2 \ . \tag{11.5.103}$$

Integracijom po uglovima možemo odrediti izračenu energiju po jediničnom intrvalu frekvenci. Mi ćemo do ovog izraza doći polazeći od Larmorove formule. Iz nje sledi da je energija, u dipolnoj aproksimaciji, koju sistem emituje u svim pravcima u vremenskom intervalu $(-\infty, \infty)$ data sa

$$\mathcal{E} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t|\ddot{\mathbf{p}}(t)|^2 \ . \tag{11.5.104}$$

Primenom rezultata (11.5.97) izračena energija postaje

$$\mathcal{E} = \frac{1}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\omega\omega^4|\mathbf{p}_\omega|^2 \tag{11.5.105}$$

Iz ovog izraza vidimo da je spektralni intenzitet zračenja, tj. emitovana energija po jediničnom intervalu frekvenci u svim pravcima data sa

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{6\pi^2\epsilon_0 c^3}\omega^4|\mathbf{p}_\omega|^2 \ . \tag{11.5.106}$$

Spektralni intenzitet zračenja je proporcionalna četvrtom stepenu frekvence zračenja.

11.6 Kočenje zračenjem

Ubrzana naelektrisana čestica gubi energiju usled zračenja. Promena energije čestice za vreme $\mathrm{d}t$ je

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathcal{E}_c &= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{v}}^2(\tau)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\dot{\mathbf{v}}\mathrm{d}\mathbf{v} \ . \end{aligned} \tag{11.6.107}$$

Sa druge strane promena kinetičke energije čestice jednaka radu sila koje deluju na česticu

$$\Delta T = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \mathbf{v}\mathrm{d}t \ . \tag{11.6.108}$$

Ovo nam omogućava da gubitak energije naelektrisane čestice na zračenje interpretiramo kao rad fiktivne sile, koju nazivamo silom radijacionog trenja ili silom kočenja zračenjem, $\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}$.

Napomenimo da nismo uveli silu radijacionog trenja delovalo bi da zračenje ubrzane naelektrisane čestice je nekonzistentno sa teoremom energije. Čestica gubi energiju, a da pri tom na nju ne deluje nikakva sila. Ova nekonzistentnost se trivijalno rešava, jer nismo uzeli da pored čestice imamo i elektromagnetno polje koje nosi deo energije.

Polazimo od

$$-\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}} \mathrm{d}\mathbf{v} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \cdot \mathbf{v} \mathrm{d}t \tag{11.6.109}$$

primenom parcijalne integracije i ignorisanjem člana

$$\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}\Big|_{t_1}^{t_2} \tag{11.6.110}$$

dobijamo silu radijacionog trenja

$$\mathbf{F}_{\mathrm{rad}} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\ddot{\mathbf{v}} \ . \tag{11.6.111}$$

Jednačina kretanja čestice koja zrači je

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_{\mathrm{rad}} \tag{11.6.112}$$

i ona ima smisla ukoliko je $|\mathbf{F}_0| \gg |\mathbf{F}_{\mathrm{rad}}|$.

11.7 Magnetno dipolno i kvadrupolno zračenje u talasnoj zoni

U paragrafu 11.4 analizirali smo najniži član u razvoju vektorskog potencijala (11.4.65). Taj član sadrži električni dipolni moment, pa je i cela aproksimacija poznata kao električna dipolna aproksimacija. U većini primera ova aproksimacija je dovoljna za analizu zračenja. Medjutim, ukoliko je npr. električni dipolni moment sistema jednak nuli, potrebno je da odredimo doprinos zračenju od narednog člana u razvoju potencijala. Taj član je

$$\mathbf{A}^{(2)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\int \mathrm{d}^3 r'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\frac{\partial \mathbf{j}(t,\mathbf{r}')}{\partial t}\Big|_{t=\tau} \ . \tag{11.7.113}$$

Primenom identiteta

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}'\times\mathbf{j})\times\mathbf{n} + \frac{1}{2}\Big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}'\Big) \ , \tag{11.7.114}$$

izraz (11.7.113) postaje

$$\mathbf{A}^{(2)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\Big(\dot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}^3 r'\Big((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}'\Big)\Big|_{t=\tau}\Big) \ , \tag{11.7.115}$$

gde je $\mathbf{m}$ magnetni dipolni moment sistema. Ranije smo pokazali da ako je vektorsko polje $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ lokalizovano unutar neke konačne oblasti prostora, onda je

$$\int_V \mathrm{d}^3 r'\mathbf{a} = -\int_V \mathrm{d}^3 r'\mathbf{r}'\mathrm{div}'\mathbf{a} \ . \tag{11.7.116}$$

Ako izabremo $\mathbf{a} = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}$, uz primenu jednačine kontinuiteta, dobijamo

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3r'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} &= -\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'\mathrm{div}'[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j}] \\ &= -\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathrm{div}\mathbf{j} - \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}) \\ &= \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\frac{\partial\rho}{\partial t} - \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\ .\end{aligned}$$

Iz poslednjeg izraza sledi

$$\int \mathrm{d}^3r'((\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\mathbf{j} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})\mathbf{r}') = \int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\frac{\partial\rho}{\partial t}\ , \tag{11.7.117}$$

što zamenom u (11.7.115) daje

$$\mathbf{A}^{(2)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\Big(\dot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \mathrm{d}^3r'\mathbf{r}'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\rho(t,\mathbf{r}')\Big|_{t=\tau}\Big)\ . \tag{11.7.118}$$

Prvi sabirak u (11.7.118) je magnetni dipolni član. Drugi član u (11.7.118) transformišemo na sledeći način

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}^3r' x_i'(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')\rho(t,\mathbf{r}') &= \frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3r'\rho(t,\mathbf{r}')\Big[3x_i'x_j' - r'^2\delta_{ij}\Big]n_j + \frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3r'\rho(t,\mathbf{r}')r'^2 n_i \\ &= \frac{1}{3}D_{ij}n_j + \frac{1}{3}\int \mathrm{d}^3r'\rho(t,\mathbf{r}')r'^2 n_i\ .\end{aligned} \tag{11.7.119}$$

Nakon sredjivanja dobijamo

$$\mathbf{A}^{(2)}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\Big(\dot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n} + \frac{1}{6}\ddot{D}(\tau)\mathbf{n} + \frac{1}{6}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \mathrm{d}^3r'\rho(t,\mathbf{r}')r'^2\mathbf{n}\Big|_{\tau}\Big)\ . \tag{11.7.120}$$

Vidimo da u drugom sabirku u (11.7.120) figuriše tenzor električnog kvadrupolnog momenta. Zadnji sabirak je kolinearan sa $\mathbf{n}$ i on ne daje nikakav doprinos zračenju. Iz izraza (11.7.120) se lako nalazi magnetno polje. Ono je dato sa

$$\mathbf{B}^{(2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^4}\Big[\frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{r} + \frac{(\dddot{D}(\tau)\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{6r}\Big]\ . \tag{11.7.121}$$

Na velikim rastojanjima od sistema čestica, u talasnoj zoni pokazali smo da važi

$$\mathbf{E}^{(2)} = c(\mathbf{B}^{(2)}\times\mathbf{n})\ . \tag{11.7.122}$$

Dakle, vektorski potencijal i magnetno polje u talasnoj zoni imaju oblik

$$\mathbf{A}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\Big(\frac{\dot{\mathbf{p}}(\tau)}{r} + \frac{\dot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n}}{cr} + \frac{\ddot{D}(\tau)\mathbf{n}}{6cr} + \frac{1}{6cr}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \mathrm{d}^3r'\rho(t,\mathbf{r}')r'^2\mathbf{n}\Big|_{\tau}\Big)\ , \tag{11.7.123}$$

odnosno

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\Big[\frac{\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n}}{r} + \frac{(\ddot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{cr} + \frac{(\dddot{D}(\tau)\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{6cr}\Big] \ . \tag{11.7.124}$$

U poslednji izraz uključili smo i električni dipolni član. Sabirci u ovim izrazima odgovaraju aproksimaciji električnog dipola, magnetnog dipola, odnosno električnog kvadrupola.

Emitovana energija koju izvor zrači u jedinici vremena u jedinični prostorni ugao naziva se angularnom distribucijom snage zračenja. Ona je data sa

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\mathbf{S}_p\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{\mu_0}B^2r^2 \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0 c^3}\Big[\ddot{\mathbf{p}}(\tau)\times\mathbf{n} + \frac{1}{c}(\ddot{\mathbf{m}}(\tau)\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} + \frac{1}{6c}\dddot{D}(\tau)\mathbf{n}\times\mathbf{n}\Big]^2 \ .\end{aligned} \tag{11.7.125}$$

Ovaj izraz sadrži dve vrste članova. Tri sabirka su čisti kvadrati i to samo od jednog od momenata. Preostali sabirci zavise od dva momenta. Intenzitet zračenja se dobija integracijom po sfernim uglovima θ i φ. Primenom Primera 2. iz poglavlja 11.4 dobijamo ukupnu snagu, tj. intenzitet zračenja

$$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big[\frac{2}{3c^3}\ddot{\mathbf{p}}^2(\tau) + \frac{2}{3c^5}\ddot{\mathbf{m}}^2(\tau) + \frac{1}{180c^5}\mathrm{tr}(\dddot{D}^2(\tau))\Big] \ , \tag{11.7.126}$$

gde je $\mathrm{tr}(\dddot{D}^2(\tau)) = \dddot{D}_{ij}(\tau)\dddot{D}_{ji}(\tau)$. Prvi član u (11.7.126) predstavlja električni dipolni član, sledeći član je magnetno dipolno zračenje, dok je zadnji član kvadrupolni član. Vidimo da je izraz za snagu zračenja razvoj po stepenima v/c.

11.8 Lijenar-Vihertovi potencijali i polja

Neka se naelektrisanje q kreće po zadatoj trajektoriji, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(t)$. Odredimo elektromagnetno polje koje stvara ovo naelektrisanje. Prvo ćemo izračunati skalarni i vektorski potencijal, a zatim na osnovu njih odredićemo polje. Potencijali i polja naelektrisanja koje se kreće po poznatoj trajektoriji se nazivaju Lijenar-Vihertovim potencijalima, odnosno poljima.

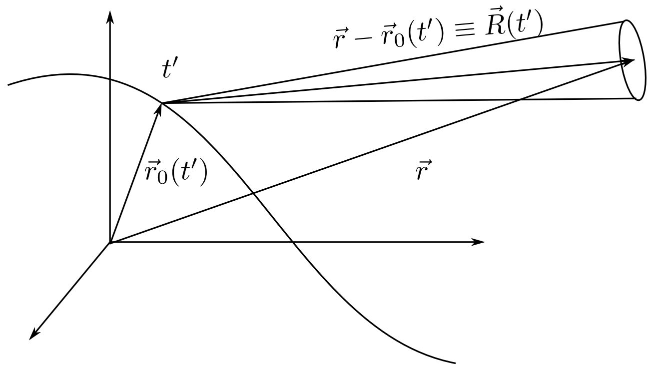
Gustinu naelektrisanja i gustina struje naelektrisanja su date sa

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r},t) &= q\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)) \ , \\ \mathbf{j}(\mathbf{r},t) &= q\mathbf{v}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t)) \ .\end{aligned} \tag{11.8.127}$$

Ove izraze zamenićemo u izraze za retardovane potencjale:

$$\begin{aligned}\phi(t,\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t'\frac{\rho(t',\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\Big(t'-t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\Big) \\ \mathbf{A}(t,\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\mathrm{d}t'\frac{\mathbf{j}(t',\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\Big(t'-t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\Big) \ .\end{aligned} \tag{11.8.128}$$

Nakon integracije po $\mathbf{r}'$ skalarni potencijal postaje



Slika 11.4: Tačkasto naelektrisanje koje se kreće po zadatoj trajektoriji.

$$\phi(t,\mathbf{r})=\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}t'\frac{\delta(t'-t+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}\ . \tag{11.8.129}$$

Primenom formule

$$\int f(t')\delta(g(t'))\mathrm{d}t'=\frac{f(t')}{\left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t'}\right|}\Big|_{g(t')=0}\ , \tag{11.8.130}$$

dolazimo do

$$\phi(\mathbf{r},t)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|-\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t'))\cdot\mathbf{v}(t')}{c}}\Big|_{t=t'+\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}}\ . \tag{11.8.131}$$

Sa $\mathbf{v}(t')$ obeležili smo brzinu čestice u trenutku t'. Skalarni potencijal nalazimo u trenutku t u tački $\mathbf{r}$, pa se trenutak t naziva trenutkom detekcije. Vremenski trenutak t', koji figuriše u izrazu za potencijal, je tzv. vreme emisije. Ovaj trenutak je pre trenutka detekcije. Veza izmedju t i t' je data relacijom:

$$t-t'=\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}\ .$$

Na sličan način dolazimo do vektorskog potencijala. Uvodeći vektor $\mathbf{R}(t')=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')$ (slika 11.4), potencijali su

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R(t')-\frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{c}}\Big|_{t=t'+\frac{R(t')}{c}} \tag{11.8.132}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}(t')}{R(t')-\frac{\mathbf{R}(t')\cdot\mathbf{v}(t')}{c}}\Big|_{t=t'+\frac{R(t')}{c}}. \tag{11.8.133}$$

Ovo su Lijenar-Vihertovi potencijali. Intenzitet vektora $\mathbf{R}$ je

$$R(t')=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|=\sqrt{(x-x_0(t'))^2+(y-y_0(t'))^2+(z-z_0(t'))^2}\ . \tag{11.8.134}$$

Diferenciranjem intenziteta ovog vektora po t', uz konstantno $\mathbf{r}$, dobijamo

$$\frac{\partial R}{\partial t'}\Big|_{\mathbf{r}}=-\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}=-\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\ . \tag{11.8.135}$$

Diferenciranjem izraza

$$t = t' + \frac{R(\mathbf{r}, t')}{c} \tag{11.8.136}$$

po t, uz konstantno $\mathbf{r}$, dobijamo

$$1 = \frac{\partial t'}{\partial t}\Big(1 + \frac{1}{c}\frac{\partial R}{\partial t'}\Big) \tag{11.8.137}$$

odakle je

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}} \ . \tag{11.8.138}$$

Uzimanjem gradijenta izraza (11.8.136) pri konstantnom t, dobijamo

$$0 = \nabla t' + \frac{1}{c}\Big(\nabla R\Big|_{t'} + \frac{\partial R}{\partial t'}\Big|_{\mathbf{r}}\nabla t'\Big) \tag{11.8.139}$$

odakle je

$$\nabla t' = -\frac{1}{c}\frac{\mathbf{R}}{R\Big(1 - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{cR}\Big)} \ . \tag{11.8.140}$$

Iz izraza za potencijale odredimo prvo električno polje

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ . \tag{11.8.141}$$

Potencijal (11.8.132) je oblika

$$\phi = \phi(\mathbf{r}, t'(t, \mathbf{r})) \ , \tag{11.8.142}$$

pa je

$$\nabla\phi\Big|_t = \nabla\phi\Big|_{t'} + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\nabla t'\Big|_t \ . \tag{11.8.143}$$

Gradijent potencijala je

$$\nabla\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\Big(R - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{c}\Big)^2}\Big(-\frac{\mathbf{R}}{R} + \frac{\mathbf{v}}{c} - \Big(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} + \frac{1}{c}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{v}^2)\Big)\frac{\mathbf{n}}{c - \frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{v}}{R}}\Big) \ , \tag{11.8.144}$$

gde je $\mathbf{a}$ ubrzanje čestice. Sredjivanjem prethodnog izraza dobijamo

$$\nabla\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c}\frac{1}{R^2\Big(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\Big)^2}\Big(\mathbf{v} + \frac{v^2 - c^2 - \mathbf{R}\cdot\mathbf{a}}{c - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{n}\Big) \ . \tag{11.8.145}$$

Lako se dobija i

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} \ . \tag{11.8.146}$$

Koristeći (11.8.138) dobijamo

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{1}{R\Big(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\Big)^2}\Big(\mathbf{a} - \frac{(v^2 - \mathbf{R}\cdot\mathbf{a} - c\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{v}}{R(c - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v})}\Big) \ . \tag{11.8.147}$$

Zamenom (11.8.144) i (11.8.147) u izraz za električno polje dobijamo

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)}{R^2\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3} + \frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\mathbf{v}/\mathbf{c})\times\mathbf{a}]}{c^2R\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3}\right]\Bigg|_{t=t'+\frac{R}{c}} . \tag{11.8.148}$$

Uzimanjem rotora izraza (11.8.133) dolazimo do

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c}(\mathbf{n}\times\mathbf{E}) . \tag{11.8.149}$$

Dobili smo vezu imedju polja karakterističnu za ravne talase. Električno i magnetno polje su medjusobno ortogonalni. U prethodnim izrazima brzina i ubrzanje čestice zavise od t'. Prvi sabirak u izrazu za električno polje naelektrisane čestice u kretanju (11.8.148) zavisi od brzine čestice i na velikim rastojanjima od čestice ponaša se kao $\frac{1}{R^2}$, dok drugi sabirak zavisi od brzine ali i od ubrzanja čestice i ponaša se kao $\frac{1}{R}$. On je odgovoran za zračenje čestice.

Za nerelativističku česticu koja se kreće stalnom brzinom je $t' \approx t$, pa se iz (11.8.149) sledi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\mathbf{R}}{R^3} , \tag{11.8.150}$$

što je poznat rezultat.

11.9 Zračenje relativističke čestice

U ovom poglavlju analiziraćemo zračenje relativističke čestice. Naći ćemo ugaonu raspodelu snage zračenja i njenu vezu sa ugaonom raspodelom smanjenja snage čestice. Ukupni gubici naelektrisane čestice na zračenje u jedinici vremena dobijeni su relativističkom generalizacijom Larmorove formule.

11.9.1 Ugaona raspodela snage zračenja

Na velikim rastojanjima od naelektrisane čestice u izrazu za električno polje zadržaćemo samo član tipa $1/R$, tj.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\mathbf{v}/\mathbf{c})\times\dot{\mathbf{v}}]}{R\left(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}}{c}\right)^3}\Bigg|_* , \tag{11.9.151}$$

gde $*$ označava

$$c(t-t') = |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')| . \tag{11.9.152}$$

Sa t' označili smo 'vreme emisije' a sa t 'vreme detekcije'. Magnetno polje na velikim rastojanjima je dato sa (11.8.149), gde je električno polje određeno sa (11.9.151). Na velikim rastojanjima od naelektrisane čestice električno i magnetno polje su međusobno ortogonalni i ortogonalni su na pravac prostiranja talasa. Polja su oblika $1/R$ što znači da će naelektrisana ubrzana čestica da zrači. Energija u jedinici vremena koju izmeri posmatrač na rastojanju R, od tačkastog naelektrisanja, koja prodje kroz površ $R^2\mathrm{d}\Omega$ u trenutku t je

$$\mathrm{d}P = \mathbf{S}_p \cdot \mathbf{n} R^2 \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 R^2 \mathrm{d}\Omega \; . \tag{11.9.153}$$

Zamenom (11.9.151) o uvaj izraz dobijamo detektovanu snagu zračenja u jedinični prostorni ugao, tj. uglovnu distribuciju snage

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^5} \frac{\Big(\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \mathbf{v}/\mathbf{c}) \times \dot{\mathbf{v}}]\Big)^2}{\Big(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\Big)^6}\Bigg|_* \; . \tag{11.9.154}$$

U nerelativističkom limesu za uglovnu raspodelu snage zračenja iz (11.9.154) dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 \mu_0 c^5} \Big(\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{a})\Big)^2\Big|_{t=\tau} \; , \tag{11.9.155}$$

što je već poznat rezultat. Integracijom (11.9.154) po prostornom uglu dobili bismo ukupnu energiju u jedinici vremena, $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ koju detektuju udaljeni detektori u trenutku t. Energiju $\mathrm{d}W$ izmeri udaljeni posmatrač u vremenskom intervalu $(t, t + \mathrm{d}t)$. Sa druge strane energija naelektrisane čestice se smanjuje zbog gubitka na zračenje. U intervalu $(t', t' + \mathrm{d}t')$ energija čestice se promeni za $\mathrm{d}\mathcal{E}$. Veličina $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t'$ predstavlja promenu energije čestice u jedinici vremena, ali računato po vremenu emisije t' a ne po vremenu detekcije t. Medjutim, ove dve snage nisu iste, tj.

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} \neq \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} \; . \tag{11.9.156}$$

Veličina $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t'$ je relativistička invarijanta, dok veličina $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ nije. Usputni sistem reference S_0 je inercijalni sistem u malom vremenskom intervalu $(t', t' + \mathrm{d}t')$ u kojem čestica miruje. Ubrzanje čestice u usputnom sistemu nije jednako nuli. Za sopstveno vreme $\mathrm{d}t_0$ čestica smanji energiju za $\mathrm{d}\mathcal{E}_0$. Ranije smo pokazali da je u sopstvenom sistemu promena impulsa čestice jednaka nuli. Prelazak u laboratorijski sistem reference u kome se čestica kreće brzinom $\mathbf{v}$ je Lorencov bust. Promena četvoroimulsa čestice u tom sistemu je

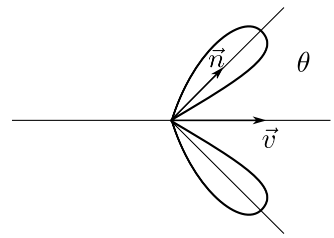
$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{E}/c \\ \mathrm{d}\mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ \gamma\boldsymbol{\beta} & \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta_i\beta_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}\mathcal{E}_0/c \\ 0 \end{pmatrix} \; , \tag{11.9.157}$$

gde je $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. Odavde je

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; . \tag{11.9.158}$$

Primenom formule za dilataciju vremena,

$$\mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.9.159}$$



Slika 11.5:

dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_0}{\mathrm{d}t_0} \ . \tag{11.9.160}$$

Iz ovog izraza zaključujemo da veličina $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t'$ jeste relativistička invarijanta, jer se u prethodnoj formuli nigde ne pojavljuje brzina čestice.

Uglovna raspodela smanjenja energije čestice je

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega}\Big(1 - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\Big) \ , \tag{11.9.161}$$

gde je $\mathrm{d}P(t)/\mathrm{d}\Omega$ ugaona raspodela snage zračenja data sa (11.9.154), čijom zamenom dobijamo

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 q^2}{16\pi^2 c}\frac{\Big(\mathbf{n}\times[(\mathbf{n}-\mathbf{v}/\mathbf{c})\times\dot{\mathbf{v}}]\Big)^2}{\Big(1-\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}(t')}{c}\Big)^5}\Bigg|_* \ . \tag{11.9.162}$$

Formula (11.9.162) daje ugaonu raspodelu gubitka energije čestice računato po vremenu emisije. Ona predstavlja fizičku veličinu koja opisuje ugaone gubitke snage zračenja čestice, a ne formula (11.9.154).

Posmatrajmo jedan specijalan slučaj kada su brzina i ubrzanje relativističke čestice paralelni. Tada je

$$(\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{a}))^2 = a^2\sin^2\theta \ , \tag{11.9.163}$$

gde je θ ugao izmedju pravca $\mathbf{n}$ i brzine čestice. Ugaona raspodela gubitka energije čestice u jedinici vremena je

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mu_0 q^2\dot{v}^2\sin^2\theta}{16\pi^2 c\Big(1-\frac{v}{c}\cos\theta\Big)^5} \ . \tag{11.9.164}$$

Angularna funkcija

$$f(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\Big(1-\frac{v}{c}\cos\theta\Big)^5} \tag{11.9.165}$$

opisuje ugaonu raspodelu zračenja i prikazana je na slici 11.5. Odredimo ugao $\theta_{\max}$ za koji je gubitak energije čestice maksimalan. Diferenciranjem funkcije $f(\theta)$ po θ i izjednačavanjem dobijenog izraza sa nulom dobijamo

$$\cos\theta_{\max} = \frac{-1+\sqrt{1+15\frac{v^2}{c^2}}}{3\frac{v}{c}} \ . \tag{11.9.166}$$

U ultrarelativističkom limesu $v \approx c$ maksimum zračenja odgovara uglu $\theta_{\max} \approx 0$, tj. čestica najviše zrači u pravcu kretanja. Procenimo ovaj ugao malo preciznije. Kako je $v \approx c$ to je $\gamma \gg 1$ pa će nam $\frac{1}{\gamma}$ biti parametar po kome razvijamo u stepeni red. Formula (11.9.166) daje

$$\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{1}{8\gamma^2} \ . \tag{11.9.167}$$

Sa druge strane je $\cos\theta_{\max} \approx 1 - \frac{1}{2}\theta_{\max}^2$, pa konačno dobijamo

$$\theta_{\max} \to \frac{1}{2\gamma} \ . \tag{11.9.168}$$

Dakle, ultrarelativistička čestica čije ubzranje je duž pravca kretanja zrači unutar uskog konusa čija je osa pravac kretanja.

11.9.2 Relativistička generalizacija Larmorove formule

Integracijom angularne raspodele (11.9.162) po uglovima dobili bismo gubitak energije čestice u jedinici vremena. Medjutim, na osnovu Larmorove formule koja važi u nerelativističkom slučaju, i činjenice da je promena energije čestice u jedinici vremena Lorencov skalar rezultat ćemo lako pogoditi.

Larmorova formula daje izračenu snagu u svim pravcima za sistem čestica koje se kreću nerelativističkim brzinama. U nerelativističkoj aproksimaciji detektovana snaga se poklapa sa izračenom. U slučaju kretanja jedne čestice naelektrisanja q, Larmorova formula je

$$\begin{aligned} P &= -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} q^2 |\ddot{\mathbf{r}}|^2 \\ &= \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\frac{q^2}{m^2}\Big(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}\Big)^2 . \end{aligned} \tag{11.9.169}$$

U poslednjem koraku uveli smo impuls čestice $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Pošto je snaga P relativistička invarijanta pokušajmo prethodni nerelativistički izraz da generališemo na slučaj proizvoljnog kretanja čestice. Odgovor je pravolinijski. Snaga je

$$P = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} \ , \tag{11.9.170}$$

gde je P^μ četvoroimpuls čestice, a τ sopstveno vreme. Jasno je da je

$$-\frac{\mathrm{d}P_\mu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}P^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \Big(\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau}\Big)^2 - \frac{1}{c^2}\Big(\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\tau}\Big)^2, \tag{11.9.171}$$

gde je $\mathcal{E}$ energija čestice

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} , \tag{11.9.172}$$

a

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11.9.173}$$

relativistički impuls. Dalje se lako vidi da je

$$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\frac{\mathbf{F}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} , \tag{11.9.174}$$

gde je $\mathbf{F}$ Lorencova sila koja deluje na česticu. Tako smo dobili gubitke energije relativističke čestice po njenom vremenu. Ovaj rezultat možemo prepisati u obliku

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2}\mathcal{F}_\mu\mathcal{F}^\mu \tag{11.9.175}$$

gde smo uveli kvadrivektor sile

$$\mathcal{F}^\mu = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{\mathbf{F}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{pmatrix} . \tag{11.9.176}$$

Lako se vidi da je

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}\tau} &= m\gamma^4\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2} \\ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} &= m\gamma^2\Big(\dot{\mathbf{v}} + \gamma^2\frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{c^2}\mathbf{v}\Big) , \end{aligned} \tag{11.9.177}$$

gde smo sa tačkom obeležili izvod po laboratorijskom vremenu. Zamenom ovog izraza u (11.9.171) dobijamo izračenu energiju čestice po vremenu t'

$$P(t') = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}\gamma^6\Big(\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\Big) . \tag{11.9.178}$$

Pored toga što čestica izrači deo energije, ona izrači i deo impulsa

$$\mathrm{d}\mathbf{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{c^2}\mathbf{v} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^5}q^2\frac{\mathrm{d}U^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U_\nu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\mathbf{r} \tag{11.9.179}$$

Zajedno formule (11.9.170) i (11.9.179) možemo prepisati u kovarijantnom obliku

$$\mathrm{d}P^\mu = \frac{1}{6\pi\varepsilon_0 c^5}q^2\frac{\mathrm{d}U^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}U_\nu}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}x^\mu , \tag{11.9.180}$$

gde je $\mathrm{d}P^\mu$ 'izračeni četvoroimpuls'.

11.9.3 Sinhrotronsko zračenje

Sinhrotron je akcelerator čestica kod kojeg se naelektrisane čestice kreću po kružnoj putanji u konstantnom magnetnom polju. Ako zanemarimo gubitke na zračenje jednačine kretanja čestice su

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} &= q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} &= 0\ . \end{aligned} \tag{11.9.181}$$

Iz zadnje jednačine vidimo da je intenzitet brzine čestice konstantan. Pretpostavićemo da je magnetno polje duž z ose i da je početna brzina čestice ortogonalna na polje. Jednačine kretanja su

$$\begin{aligned} m\gamma\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} &= qv_yB \\ m\gamma\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} &= -qv_xB \\ m\gamma\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} &= 0\ . \end{aligned} \tag{11.9.182}$$

Uzmemo da je početna brzina v_0 u xOy ravni i da je početni položaj čestice $(x_0, y_0, 0)$. Integracijom jednačina kretanja dobijamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + x_0 \\ y &= \frac{v_0}{\omega}\Big(\cos(\omega t) - 1\Big) + y_0\ , \end{aligned} \tag{11.9.183}$$

gde je

$$\omega = \frac{qB}{m}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{11.9.184}$$

kružna frekvenca. Trajektorija čestice je krug poluprečnika

$$r = \frac{mv}{qB}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ . \tag{11.9.185}$$

Kvadrat ubrzanja čestice je

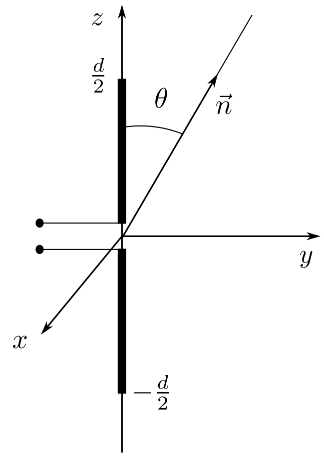
$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{v^2q^2B^2}{m^2\gamma^2}\ . \tag{11.9.186}$$

Brzina i ubrzanje čestice su ortogonalni pa iz (11.9.178) sledi da je izračena snaga data sa

$$P(t') = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\gamma^4\dot{\mathbf{v}}^2 \tag{11.9.187}$$

odnosno

$$P(t') = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0c^3}\gamma^4\frac{v^4}{r^2}\ . \tag{11.9.188}$$



Slika 11.6:

Energija koju čestica izgubi usled zračenja za vreme od jednog perioda je

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{2\pi r}{v} P = \frac{q^2}{3\varepsilon_0 c^3} \frac{\gamma^4 v^3}{r} \\ &= 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{(E[\text{GeV}])^4}{r[\text{m}]} \ .\end{aligned} \tag{11.9.189}$$

Gubici energije su veliki za ultrarelativističke čestice; proporcionalni sa četrvrtim stepenom energije čestice.

11.10 Zračenje antene

Neka je tanka linearna antena dužine d postavljena duž z ose kao na slici 11.6. Antena je presečena u sredini i priključena na naizmenični napon frekvence $\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$. Struja na krajevima antene mora biti nula; najprostiji model gustine struje u anteni je

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = I \sin(kd/2 - k|z|)\delta(x)\delta(y)e^{-i\omega t}\mathbf{e_3} \tag{11.10.190}$$

za $|z| < d/2$. Vektorski potencijal je dat sa

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{r}' \int dt' \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\Big(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\Big) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I e^{-i\omega t} \int d^3\mathbf{r}' \delta(x')\delta(y') \sin(kd/2 - k|z'|) \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\mathbf{e_3}\end{aligned}$$

Na velikim rastojanjima od antene $r \gg r' \sim d$ je $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$ i

$$e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx e^{ik(r - \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}')}$$

gde je $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ pa je

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} I e^{-i\omega t} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-d/2}^{d/2} dz' e^{-ikz'\cos\theta} \sin(k(d/2 - |z'|))\mathbf{e_3} \ . \tag{11.10.191}$$

Integracija po z' daje

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \frac{e^{ikr}}{kr} \Big[\frac{\cos(\frac{kd}{2}\cos\theta) - \cos(\frac{kd}{2})}{\sin^2\theta}\Big] e^{-i\omega t}\mathbf{e_3} \ . \tag{11.10.192}$$

Iz vektorskog potencijala se lako nalazi magnetna indukcija. Električno polje je $\mathbf{E} = c(\mathbf{n}\times\mathbf{B})$ jer je na velikim rastojanjima od sistema talas približno ravan pa je za odredjivanje Pointingovog vektora dovoljno znati magnetno polje. Srednja vrednost intenziteta zračenja po jediničnom prostornom uglu je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{8\pi^2} \Big| \frac{\cos(\frac{kd}{2}\cos\theta) - \cos(\frac{kd}{2})}{\sin\theta} \Big|^2 \ . \tag{11.10.193}$$

Za $kd \ll 1$ dobija se dipolni rezultat

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{128\pi^2} (kd)^2 \sin^2\theta. \tag{11.10.194}$$

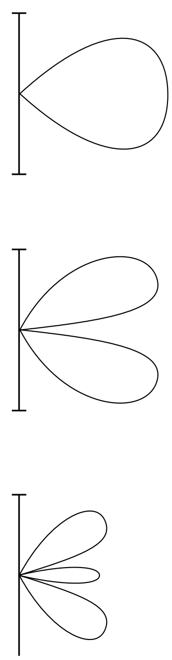
Važan specijalni slučaj je kada je dužina antene (polu)celobrojan umnožak talasne dužine $d = \frac{m\lambda}{2}$ tj. $kd = m\pi$. Za $m = 1$ angularna snaga zračenja je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{8\pi^2} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \tag{11.10.195}$$

Ova kriva je slična dipolnoj. Za $m = 2$ angularna snaga zračenja je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{I^2}{8\pi^2} \frac{4\cos^4(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{\sin^2\theta} \ . \tag{11.10.196}$$

Ugaona raspodela snage zračenja za vrednosti $m = 1, 2$ i $m = 3$ prikazana je na slici 11.7.



Slika 11.7:

Glava 12

Kvazistacionarno elektromagnetno polje

U ovoj glavi analiziraćemo sporo promenljivo polje, tj. kvazistacionarno polje. Najvažnija karakteristika ovog polja je da se svaka promena polja prenosi gotovo trenutno. Strujna kola sa promenljivom strujom, čija je frekvenca mala, su primer za kvazistacionarna polja. U ovoj glavi nećemo izlagati zakone strujnih kontura, jer ste ih izučavali u okviru Opšte fizike. Analiziraćemo kvazistacionarno elektromagnetno polje u masivnim provodnicima.

12.1 Aproksimacija

Ako su zapreminska gustina naelektrisanja i struje sporo promenljive funkcije onda je i generisano elektromagnetno polje sporo promenljiva funkcija. Za funkciju ćemo reći da je sporo promenljiva ako je njen karakteristični period $T = 2\pi/\omega$ veliki, odnosno karakteristična frekvenca mala. Sporo promenljiva polja zvaćemo kvazistacionarnim poljima. Neka su linearne dimenzije sistema L. Sasvim generalno, polje je kvazistacionarno ukoliko je vreme T mnogo veće od vremena koje je potrebno signalu da predje sa jednog kraja sistema na drugi kraj, tj. $L \ll cT$.

Dalje ćemo analizirati kvazistacionarno elektromagnetno polje u provodnicima. Pretpostavićemo da u provodnik nismo uneli naelektrisanja. Maksvelove jednačine za provodnu sredinu imaju oblik

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
\mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ .
\end{aligned} \tag{12.1.1}$$

Maksvelove jednačine moramo dopuniti sa jednačinama sredine. U kvazistacionarnoj aproksimaciji, polja su sporo promenljiva, pa je razumljivo da uzmemo da su supstancijalne jednačine iste kao jednačine za provodnik u statičkim polima

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} \\
\mathbf{B} &= \mu_0 \mu \mathbf{H} \\
\mathbf{j} &= \sigma \mathbf{E} \ ,
\end{aligned} \tag{12.1.2}$$

gde su ε, μ i σ redom električna propustljivost, magnetna propustljivost i provodnost provodnika. Polje u provodniku je kvazistacionarno ukoliko su efekti disperzije zanemarljivi, tj. ukoliko je veza izmedju makroskopske gustine struje i električnog polja simultana i lokalana. Ovo je sigurno ispunjeno ako je makroskopsko vreme T znatno veće od srednjeg vremena izmedju dva sudara elektrona sa jonima rešetke, odnosno kada je $\omega \ll \nu_c$. Sa ν_c smo obeležili srednju kolizionu frekvencu, koja je jednaka broju sudara elektrona sa rešetkom u jedinici vremena. Takodje, srednji slobodni put elektrona mora biti znatno manji od karakteristične talasne dužine polja, da bismo zanemarili prostornu disperziju. Za dobre provodnike granična frekvenca kvazistacionarnog elektromagnetnog polja se nalazi u infracrvenoj oblasti.

Pored ovog uslova za kvazistacionarno polje u provodniku se uzima još jedan uslov, vezan za Maksvelove jednačine. Po tom uslovu polje je kvazistacionarno ukoliko je struja pomeranja zanemarljiva u odnosu na struju provodjenja. Odnos struje pomeranja i provodjenja je

$$\frac{\left|\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right|}{|\mathbf{j}|} \sim \frac{\omega|\mathbf{D}|}{|\mathbf{j}|} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon E}{\sigma E} = \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma} \ll 1 \; . \tag{12.1.3}$$

Iz (12.1.3) se vidi da je struja pomeranja zanemarljiva u odnosu na struju provodjenja ako je

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} \; . \tag{12.1.4}$$

Kod loših provodnika (mala provodnost) ovaj uslov je restriktivniji od uslova $\omega \ll \nu_c$. Za dobre provodnike zanemaravanje struje pomeranja u odnosu na struju provodjenja daje graničnu frekvencu u ultravioletnoj oblasti. Za dobre provodnike (velika provodnost) prvi uslov, $\omega \ll \nu_c$ je restriktivniji. Ranije smo pokazali da je zapreminska gustina naelektrisanja u provodniku data sa $\rho = \rho(0)e^{-\sigma t/\varepsilon_0\varepsilon}$. Uslov kvazistacionarnosti (12.1.3) daje $\rho \approx 0$, tj. makroskopska gustina naelektrisanja u provodniku je bliska nuli. Dakle, Maksvelove jednačine (12.1.1) u kvazistacionarnoj aproksimaciji imaju oblik

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\mathbf{D} &= 0 \\ \mathrm{div}\mathbf{B} &= 0 \\ \mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{j} \; . \end{aligned} \tag{12.1.5}$$

Iz druge i poslednje jednačine se vidi da magnetno polje u kvazistacionarnoj aproksimaciji zadovoljava iste jednačine kao statičko magnetno polje. Vreme t u ovim jednačinama igra ulogu parametra. Kvazistacionarno polje prenosi interakciju trenutno, tj. brzina svetlosti c je velika. Drugim rečima, efekti retardacije se zanemaruju. Preciznije, karakteristični period T je dosta veći od vremena koje je svetlosti potrebno da predje sa jednog na drugi kraj sistema, tj.

$$\frac{L}{c} \ll T \Rightarrow \omega \ll \frac{c}{L} \; . \tag{12.1.6}$$

Uzimanjem rotora poslednje jednačine u (12.1.5) dobija se jednačina za magnetno polje u kvazistacionarnoj aproksimaciji

$$\triangle\mathbf{B} = \mu_0\mu_r\sigma\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \; . \tag{12.1.7}$$

Vidimo da magnetno polje zadovoljava difuzionu jednačinu[1].

12.2 Skin efekat

Analizirajmo jedan konkretan primer. Neka se u oblasti prostora $z > 0$ nalazi veliki metalni provodnika provodnosti σ i magnetne permeabilnosti μ. Van provodnika (oblast $z < 0$) postoji harmonijsko magnetno polje $\mathbf{B}_< = B_0 \cos(\omega t)\mathbf{e}_x$. Potrebno je da odredimo kvazistacionarno magnetno polje u provodniku. Lakše je računati sa kompleksnim poljima, pa ćemo uzeti da je spoljašnje polje $\mathbf{B}_< = B_0 e^{-i\omega t}\mathbf{e}_x$, dok ćemo polje u provodniku tražiti u obliku

$$\mathbf{B}_> = b(z)e^{-i\omega t}\mathbf{e}_x.$$

Zamenom u (12.1.7) dobijamo

$$\frac{d^2 b}{dz^2} + i\mu_0\mu_r\sigma\omega b = 0 \ . \tag{12.2.8}$$

Nule karakterističnog polinoma ove diferencijalne jednačine su

$$\lambda_{1,2} = \pm\frac{(1-i)}{\delta} \ , \tag{12.2.9}$$

gde je

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\mu_r\sigma\omega}} \ .$$

Rešenje jednačine (12.2.8) je

$$b(z) = Ae^{-z/\delta}e^{iz/\delta} + Ce^{z/\delta}e^{-iz/\delta} \ , \tag{12.2.10}$$

gde su A i C konstante. Moramo uzeti da je $C = 0$ da magnetno polje ne bi divergralo za $z \to \infty$. Iz graničnog uslova sledi $A = \mu B_0$. Magnetno polje je realni deo kompleksnog magnetnog polja, tj.

$$\mathbf{B}_> = \mu B_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)\mathbf{e}_x \ . \tag{12.2.11}$$

Vidi se da magnetna indukcija opada sa dubinom. Na dubini $z = \delta$ magnetna indukcija je e puta manja nego na površini. Magnetno polje je skoncentrisano u uskom sloju uz površinu provodnika. Ovo je tzv. skin efekat. Parametar δ je debljina skin sloja.

Magnetno polje difunduje u provodnik, u kome se stvaraju vrtložne (Fukoove) struje. Iz magnetnog polja možemo lako naći zapreminsku gustinu struje i električno polje u provodniku. Vrtložna struja u provodniku je

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0\mu}\mathrm{rot}\mathbf{B} = \frac{\sqrt{2}B_0}{\mu_0\delta}e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{e}_y \ . \tag{12.2.12}$$

[1] Difuziona jednačina ima oblik

$$\triangle n = D\frac{\partial n}{\partial t}$$

gde je $n = n(t, \mathbf{r})$ koncentracija a D koeficijent difuzije.

Električno polje dobijamo na osnovu Omovog zakona

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} = \frac{\sqrt{2}B_0}{\mu_0\delta\sigma} e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\Big(\frac{z}{\delta} - \omega t + \frac{3\pi}{4}\Big)\mathbf{e}_y \ . \tag{12.2.13}$$

Električno polje i gustina struje imaju sličan oblik kao i magnetno polje, jedino što kasne za njim i naravno drugačije su usmereni. Provodnost bakra na sobnoj temperaturi je $\sigma = 0,6 \cdot 10^8 (m\Omega)^{-1}$, pa je debljina skin sloja $\delta = \frac{6,5}{\sqrt{\nu}}$cm, gde je $\nu = \omega/(2\pi)$. Ako je frekvenca $\nu = 40$Hz debljina skin sloja je $\delta = 1$cm. Da bi kvazistacionarna aproksimacija bila primenljiva frekvenca ne sme biti mnogo velika. Debljina skin sloja opada sa povećanjem frekvence. Lako se vidi da je $\delta \ll \lambda$, gde je

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\omega^2}} \ , \tag{12.2.14}$$

jer je ovaj uslov ekvivalentan sa $\omega \ll \sigma/\varepsilon_0\varepsilon$. Odredimo odnos izmedju električnog i magnetnog polja. Lako se nalazi da je

$$\frac{E_y}{cB_x} \sim \frac{\delta\omega}{c} \ll 1 \ . \tag{12.2.15}$$

Kvazistacionarno elektromagnetno polje je uglavnom magnetno. Lako se pokazuje da je srednja snaga

$$P = <\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}> = \frac{B_0^2}{\mu_0^2\sigma\delta^2} e^{-2\frac{z}{\delta}} \ . \tag{12.2.16}$$

Kada debljina skin sloja δ postane reda veličine dužine srednjeg slobodnog puta elektrona kvazistacionarna aproksimacija je neprimenljiva, jer veza izmedju struje i električnog polja neće biti lokalna zbog efekata prostorne disperzije. Ispostavlja se da u ovoj oblasti frekvenci debljina skin sloja se ponaša kao $\omega^{-\frac{1}{3}}$. Skin efekat u ovoj oblasti se naziva anomalni skin efekat.

Primer 1. Po poprečnom preseku dugačkog metalnog provodnika radijusa a, provodnosti σ i permeabilnosti μ_0 teče naizmenična struja jačine $I = I_0 e^{-i\omega t}$. Naći odnos gustinu struje u unutrašnjosti provodnika i na njegovoj površini u kvazistacionarnoj aproksimaciji.

Rešenje: U kvazistacionarnoj aproksimaciji električno polje zadovoljava difuzionu jednačinu

$$\triangle\mathbf{E} = \mu_0\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \ . \tag{12.2.17}$$

Orijentisaćemo $z-$osu duž ose provodnika. Pretpostaviémo da električno polje ima sledeći oblik $\mathbf{E} = E(\rho)e^{-i\omega t}\mathbf{e}_3$. Zamenom u difuzionu jednačinu imamo

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\rho} + i\mu_0\sigma\omega E = 0 \ . \tag{12.2.18}$$

Ovo je Beselova diferencijalna jednačina. Rešenje je $E = AJ_0(k\rho)$, gde je A konstanta i

$$k = \frac{1+i}{\delta} \ . \tag{12.2.19}$$

Debljina skin sloja je

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}} \ . \tag{12.2.20}$$

Magnetno polje se odredjuje primenom treće Maksvelove jednačine. Rezultat je

$$\mathbf{B} = \frac{kAJ_1(k\rho)}{i\omega} e^{-i\omega t} \mathbf{e}_\varphi \ . \tag{12.2.21}$$

Konstanta A se odredjuje iz graničnog uslova. Odnos gustine struje u provodniku i na njegovoj periferiji je

$$\frac{j(\rho)}{j(a)} = \frac{E(\rho)}{E(a)} = \frac{J_0(k\rho)}{J_0(ka)} \ . \tag{12.2.22}$$

Za $\rho/\delta \ll 1$, što odgovara niskim frekvencama, Beselovu funkciju aproksimiraćemo sa

$$J_0(k\rho) \approx 1 - \frac{k^2 \rho^2}{4} \ , \tag{12.2.23}$$

odakle je

$$\frac{j(\rho)}{j(a)} \approx 1 \tag{12.2.24}$$

za $\rho \approx a$. Sa druge strane za $\rho/\delta \gg 1$ imamo

$$J_0(k\rho) \approx \sqrt{\frac{\delta}{2\pi(1+i)\rho}} \cos\Big(\frac{1+i}{\delta}\rho - \frac{\pi}{4}\Big) \approx \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta}{\pi\rho}} e^{\frac{\rho}{\delta} - i\left(\frac{\rho}{\delta} - \frac{\pi}{8}\right)} \ , \tag{12.2.25}$$

pa je

$$\frac{j(\rho)}{j(a)} \approx \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{\frac{\rho - a}{\delta} - i\frac{\rho - a}{\delta}} \ . \tag{12.2.26}$$

U limesu visokih frekvenci kada je $\delta \ll a$ vidimo da naizmenična struja teče u uskoj oblasti debljine δ blizu površine provodnika.

Glava 13

Sredine sa disperzijom

U poglavlju 3.2 rekli smo da, u opštem slučaju, elektrodinamički odgovor sredine na spoljašnje polje nije trenutna niti lokalna. Ovi fenomeni su poznati kao vremenska odnosno prostorna disperzija. U ovoj glavi detaljnije ćemo analizirati fenomen disperzije.

13.1 Vremenska disperzija

Polarizacija i magnetizacija sredine u datom trenutku zavise, zbog kauzalnosti, od vrednosti polja u ranijim trenucima vremena. Ova pojava se naziva vremenskom disperzijom. Vremenska disperzija se javlja u oblasti frekvenci polja ω koje su uporedive sa karakterističnom frekvencom sredine. Karakteristična frekvenca sredine je u većini slučajeva jednaka inverznom vremenu elektronske relaksacije sredine. Na primer, u nemetalnim kristalima relaksaciono vreme je reda veličine količnika dimenzija molekula $a \approx 10^{-10}$m i brzine elektrona $v = c/137$. Odgovarajuća frekvenca je $\omega \approx 10^{16}\mathrm{s}^{-1}$ i nalazi se u optičkoj oblasti spektra. To je razlog zašto je vremenska disperzija važna u optici kristala.

Pretpostavićemo da je sredina sa vremenskom disperzijom stacionarna i izotropna, pa elektrodinamičke jednačine sredine imaju oblik

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' F(t-t',\mathbf{r})\mathbf{E}(t',\mathbf{r}) \ , \tag{13.1.1}$$

$$\mathbf{B}(t,\mathbf{r}) = \mu_0 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' G(t-t',\mathbf{r})\mathbf{H}(t',\mathbf{r}) \ ,$$

$$\mathbf{j}(t,\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' K(t-t',\mathbf{r})\mathbf{E}(t',\mathbf{r}) \ .$$

Nismo pretpostavili da je sredina homogena.

Prvu jednačinu sredine prepisaćemo u obliku

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \varepsilon(t-t',\mathbf{r})\mathbf{E}(t',\mathbf{r}) \ , \tag{13.1.2}$$

gde je

$$\varepsilon(t-t',\mathbf{r}) = \eta(t-t')F(t-t',\mathbf{r}) \tag{13.1.3}$$

električna propustljivost. Funkciju $\varepsilon(t-t', \mathbf{r})$ i električno polje u (13.1.2) ćemo razložiti u Furijeov integral po frekvencama. Tako dobijamo

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t.\mathbf{r}) &= \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \varepsilon(t-t')\mathbf{E}(t', \mathbf{r}) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \varepsilon_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega(t-t')} \mathbf{E}_{\omega'}(\mathbf{r}) e^{-i\omega' t'} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \varepsilon_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \mathbf{E}_{\omega'}(\mathbf{r}) \delta(\omega - \omega') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \varepsilon_0 \varepsilon_\omega(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} . \end{aligned} \tag{13.1.4}$$

Sa $\varepsilon_\omega(\mathbf{r})$ smo obeležili Furijeovu amplitudu električne propustljivosti. Iz poslednjeg reda sledi da je veza izmedju Furijeovih amplituda vektora električne indukcije i jačine električnog polja data sa

$$\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_\omega(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) . \tag{13.1.5}$$

Ova relacija je analogna jednačini sredine za polja u statičkom slučaju, ali električna propustljivost nije konstantna već zavisi od frekvence. Sredina različito reaguje na različite monohromatske komponente elektromagnetnog polja. Analogno dobijamo i sledeće relacije

$$\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \mu_0 \mu_\omega(\mathbf{r}) \mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) \tag{13.1.6}$$

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \sigma_\omega(\mathbf{r}) \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) , \tag{13.1.7}$$

tj. magnetna propustljivost i provodnost sredine zavise od frekvence. Vremenska disperzija je vremenska nelokalnost. Veličine $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ i $\mathbf{j}$ u trenutku t zavise redom od polja $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, odnosno $\mathbf{E}$ u ranijim trenucima vremena, $t' \leq t$. Vremenska nelokalnost je ekvivalentna sa frekventnom zavisnošću dielektrične i magnetne propustljivosti kao i provodnosti sredine.

Lako se vidi da je

$$\varepsilon(\omega) = \int_0^{\infty} \mathrm{d}\tau F(\tau) e^{i\omega\tau} . \tag{13.1.8}$$

Kako je funkcija $F(\tau)$ realna onda je $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega)$. Funkcija $\varepsilon(\omega)$ je kompleksna i napisaćemo je u obliku

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) , \tag{13.1.9}$$

gde su $\varepsilon'(\omega)$ i $\varepsilon''(\omega)$ realni odnosno imaginarni deo dielektrične propustljivosti. Iz $\varepsilon^*(\omega) = \varepsilon(-\omega)$ sledi

$$\begin{aligned} \varepsilon'(-\omega) &= \varepsilon'(\omega) \\ \varepsilon''(-\omega) &= -\varepsilon''(\omega) \end{aligned} \tag{13.1.10}$$

tj. realni deo dielektrične propustljivosti je parna, a imaginarni neparna funkcija frekvence. Analogni izrazi važe za magnetnu propustljivost:

$$\begin{aligned} \mu'(-\omega) &= \mu'(\omega) \\ \mu''(-\omega) &= -\mu''(\omega) , \end{aligned} \tag{13.1.11}$$

gde je $\mu(\omega) = \mu'(\omega) + i\mu''(\omega)$. Realni i imaginarni deo kompleksne provodnosti $\sigma(\omega) = \sigma'(\omega) + i\sigma''(\omega)$ su takodje parna, odnosno neparna funkcija frekvence:

$$\begin{aligned} \sigma'(-\omega) &= \sigma'(\omega) \\ \sigma''(-\omega) &= -\sigma''(\omega) \ . \end{aligned} \tag{13.1.12}$$

Polja i izvore u Maksvel-Lorencovim jednačinama ćemo spektralno razložiti, npr.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ \rho(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_\omega(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \ . \end{aligned} \tag{13.1.13}$$

Zamenom u Maksvel-Lorencove jednačine dobijamo jednačine za Furijeove amplitude

$$\mathrm{div}\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) = \rho_\omega(\mathbf{r}) \tag{13.1.14}$$

$$\mathrm{div}\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = 0 \tag{13.1.15}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \tag{13.1.16}$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) - i\omega\mathbf{D}_\omega(\mathbf{r}) \ . \tag{13.1.17}$$

Primenom (13.1.5), (13.1.6), (13.1.7) i jednačine kontinuiteta prethodne jednačine postaju

$$\begin{aligned} &\mathrm{div}(\varepsilon_0 \varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})) = 0 \\ &\mathrm{div}\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = 0 \\ &\mathrm{rot}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = i\omega\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \\ &\mathrm{rot}\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) \ , \end{aligned} \tag{13.1.18}$$

gde je

$$\varepsilon_{\mathrm{eff}}(\omega) = \varepsilon(\omega) + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sigma(\omega) \ , \tag{13.1.19}$$

tzv. efektivna propustljivost. Jednačine (13.1.18) su analogne sa jednačinama za polje u neprovodnim sredinama, ali sa efektivnom propustljivošću umesto dielektrične propustljivosti. Efektivna propustljivost pored 'obične' propustljivosti uključuje i provodnost sredine. Obična propustljivost predstavlja doprinos vezanih elektrona.

Pretpostavimo da je sredina nemagnetna, tj. $\mu \approx 1$. Uzimanjem rotora treće jednačine (13.1.18), uz primenu prve i četvrte, dobijamo

$$\triangle\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}) = -\bigtriangledown\left[\frac{\bigtriangledown\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})}{\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})}\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})\right] \ . \tag{13.1.20}$$

Analogno uzimanjem rotora četvrte jednačine dobijamo

$$\triangle\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) = \mathrm{rot}\mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}) \times \frac{\bigtriangledown\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})}{\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}(\mathbf{r})} \ . \tag{13.1.21}$$

Jednačine (13.1.20) i (13.1.21) su osnova za proučavanje prostiranja talasa u nehomogenim sredinama. Ukoliko je sredina homogena, efektivna propustljivost ne zavisi od položaja pa jednačine (13.1.20) i (13.1.21) postaju talasne jednačine. Za neprovodne sredine u oblasti frekvenci gde nema apsorpcije talasa efektivna propustljivost je realna i pozitivna, pa je fazna brzina monohromatskog talasa data sa

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\omega^{\mathrm{eff}}}} \; . \tag{13.1.22}$$

Fazna brzina talasa zavisi od frekvence. Indeks prelamanja sredine, će onda biti funkcija frekvence. Još jedna manifestacija vremenske disperzije.

13.2 Energijski odnosi

Čestice sredine se kreću u elektromagnetnom polju i deo energije polja prelazi u mehaničku energiju čestica. Sa druge strane pri kretanju naelektrisanih čestica sredine generiše se elektromagnetno polje i dešava se suprotan proces. Mehanička energija prelazi u energiju polja. Medjutim, čestice sredine se sudaraju medjusobno i taj proces je ireverzibilan, jer deo energije nepovratno prelazi u toplotu, tj. dolazi do disipacije elektromagnetne energije. Toplota nije funkcija stanja pa je razumljivo da se u opštem slučaju ne može definisati energija elektromagnetnog polja u sredini. Za linearne sredine bez disperzije energiju elektromagnetnog polja našli smo u poglavlju 4.1. U ovom poglavlju analiziraćemo stacionarne i izotropne sredine sa vremenskom disperzijom.

Pointingova teorema

$$-\mathrm{div}\mathbf{S}_p = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \tag{13.2.23}$$

je direktna posledica Maksvelovih jednačina i važi u opštem slučaju. Preciznije, važi u situacijama u kojima je primenljiva klasična elektrodinamika.

Razmatrajmo prvo slučaj neprovodnih sredina. Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\Big(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\Big) \tag{13.2.24}$$

predstavlja energiju polja po jedinici zapremine koja se pretvori u toplotu u tački $\mathbf{r}$ za sve vreme. Prvi sabirak u prethodnom integralu je

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= -\frac{i}{(2\pi)^2}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\mathbf{E}_{\omega'}\omega\varepsilon_\omega\mathbf{E}_\omega e^{-i(\omega'+\omega)t}\\ &= -\frac{i}{2\pi}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\varepsilon_\omega\omega|\mathbf{E}_\omega|^2 \; . \end{aligned} \tag{13.2.25}$$

U prethodnom računu primenili smo disperzionu relaciju (13.1.5). Dalje ćemo dielektričnu propustljivost napisati u obliku

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \; , \tag{13.2.26}$$

gde je kao što znamo $\varepsilon'(\omega)$ parna, a $\varepsilon''(\omega)$ neparna funkcija frekvence. Zbog toga konačno dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \varepsilon''_\omega \omega |\mathbf{E}_\omega|^2 \ . \tag{13.2.27}$$

Slično se dobija i

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \mu''_\omega \omega |\mathbf{H}_\omega|^2. \tag{13.2.28}$$

Prema tome

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \Big(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \omega \Big[\varepsilon_0 \varepsilon''_\omega |\mathbf{E}_\omega|^2 + \mu_0 \mu''_\omega |\mathbf{H}_\omega|^2 \Big] \ . \tag{13.2.29}$$

Ako je sredina neprovodna onda gornji integral predstavlja energiju u jedinici zapremine oslobodjenu u sredini u vremenskom intervalu $(-\infty, \infty)$. Kako dolazi do oslobadjanja energije, tj. pretvatranja energije polja u toplotu to mora biti

$$\varepsilon''_\omega > 0, \ \mu''_\omega > 0 \ . \tag{13.2.30}$$

Vidimo da su imaginarni delovi dielektrične i magnetne propustljivosti vezani za apsorpciju elektromagnetne energije od sredine. Toplota nije funkcija stanja pa energiju polja ne možemo definisati u termodinamičkom smislu kao funkciju stanja. Kod većine sredina disperziju magnetne propustljivosti možemo zanemariti.

Ukoliko je sredina provodna onda član $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ u Pointingovoj teoremi je odgovoran za omske gubitke energije elektromagnetnog polja. Postupajući kao u (13.2.25), nalazimo da je doprinos ovog člana zapreminskoj gustini oslobodjenje toplote za sve vreme dat sa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \sigma'_\omega |\mathbf{E}_\omega|^2 \ . \tag{13.2.31}$$

Iz ovog rezultata, a na osnovu termodinamičkih zakona je jasno da je realni deo provodnosti pozitivna funkcija. Kombinujući rezultat (13.2.31) sa prethodnim rezultatom (13.2.29) dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \Big(\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Big) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\omega \omega \Big[\varepsilon_0 \varepsilon''_{\mathrm{eff}}(\omega) |\mathbf{E}_\omega|^2 + \mu_0 \mu''_\omega |\mathbf{H}_\omega|^2 \Big] \ . \tag{13.2.32}$$

Ovaj izraz predstavlja oslobodjenu toplotu po jedinici zapremine za sve vreme. Kada su imaginarni delovi efektivne električne propustljivosti i magnetne propustljivosti različiti od nule dolazi do pretvaranja energije polja u toplotu. Oblast frekvenci za koje je imaginarni deo efektivne propustljivosti mali u odnosu na realni, tj.

$$\varepsilon''_{\mathrm{eff}}(\omega) \ll |\varepsilon'_{\mathrm{eff}}(\omega)|, \tag{13.2.33}$$

naziva se oblast prozračnosti, odnosno transparentnosti sredine. U tim oblastima frekvenci polja disipacija elektromagnetne energije je zanemarljiva i izraz za elektromagnetnu energiju je sličan izrazu za energiju polja u slučaju statičkih polja. U ovim oblastima frekvenci ne dolazi do značajnog prigušenja talasa.

Fizički smisao realnog i imaginarnog dela električne i magnetne propustljivosti možemo sagledati na još jedan način. Iz izraza (13.2.25), uz smenu $\omega' \to -\omega'$, imamo

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{i}{(2\pi)^2}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\mathbf{E}(\omega)\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}^*(\omega')e^{-i(\omega-\omega')t}\ . \tag{13.2.34}$$

Električno polje je realno, pa važi $\mathbf{E}(\omega) = \mathbf{E}^*(-\omega)$. Izraz (13.2.34) transformisaćemo na sledeći način. Napisaćemo ga kao zbir dva sabirka od kojih je svaki polovina izraza (13.2.34), pa ćemo u drugom sabirku napraviti smenu $\omega \to -\omega'$ i $\omega' \to -\omega$. Tako dobijamo

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{i}{2(2\pi)^2}\varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'(\omega'\varepsilon^*(\omega')-\omega\varepsilon(\omega))\mathbf{E}^*(\omega')\mathbf{E}(\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}\ . \tag{13.2.35}$$

Izraz $\omega'\varepsilon^*(\omega')-\omega\varepsilon(\omega)$ prepisaćemo preko realnog i imaginarnog dela propustljivosti:

$$\omega'\varepsilon^*(\omega')-\omega\varepsilon(\omega) = \omega'\varepsilon'(\omega')-\omega\varepsilon'(\omega)-i(\omega'\varepsilon''(\omega')+\omega\varepsilon''(\omega))\ .$$

Zatim ćemo pretpostaviti da je električno polje dominantno u uskom intervalu frekvenci, pa možemo koristiti razvoj

$$\omega'\varepsilon'(\omega') \approx \omega\varepsilon'(\omega)-(\omega-\omega')\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon'(\omega))}{\mathrm{d}\omega}\ , \tag{13.2.36}$$

odnosno

$$\omega'\varepsilon''(\omega') \approx \omega\varepsilon''(\omega)+(\omega-\omega')\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon''(\omega))}{\mathrm{d}\omega}\ . \tag{13.2.37}$$

Tako dolazimo do

$$\omega'\varepsilon^*(\omega')-\omega\varepsilon(\omega) = -2i\omega\varepsilon''(\omega)-(\omega-\omega')\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon'(\omega))}{\mathrm{d}\omega}\ , \tag{13.2.38}$$

gde smo član sa izvodom imaginarnog dela propustljivosti po frekvenci zanemarili u odnosu na vodeći član. Zamenom ovog izraza u (13.2.35) dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{\varepsilon_0}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\omega\varepsilon''(\omega')\mathbf{E}^*(\omega')\mathbf{E}(\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}\\ &+ \frac{\varepsilon_0}{2(2\pi)^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\varepsilon'(\omega))\mathbf{E}^*(\omega')\mathbf{E}(\omega)e^{-i(\omega-\omega')t}\ .\end{aligned} \tag{13.2.39}$$

Analogno se dobija i izaraz za $\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$. Već smo pretpostavili da je elektromagnetni talas kvazi-monohromatski, tj da predstavlja superpoziciju monohromatskih talasa u veoma uskom intervalu frekvenci oko frekvence ω_0. Dakle, elektromagnetno polje je oblika

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \tag{13.2.40}$$

gde su $\mathbf{E}_0(t)$ i $\mathbf{H}_0(t)$ sporo promenljive funkcije u odnosu na vreme $1/\omega_0$. Za takva polja važi

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = Q+\frac{\partial u_{\mathrm{eff}}}{\partial t} \tag{13.2.41}$$

gde su

$$u_{\text{eff}} = \frac{1}{2}\Big(\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon')|\mathbf{E}(t)|^2 + \mu_0 \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\mu')|\mathbf{H}(t)|^2\Big) \tag{13.2.42}$$

i

$$Q = \omega\Big(\varepsilon_0\varepsilon''|\mathbf{E}(t)|^2 + \mu_0\mu''|\mathbf{H}(t)|^2\Big) \ . \tag{13.2.43}$$

U gornjim izrazima indeks 0 na frekvenci nismo pisali. u_{eff} je efektivna zapreminska gustina elektromagnetne energije. U tom izrazu se pojavljuju realni delovi dielektrične i magnetne propustljivosti. Drugi član Q predstavlja konverziju elektromagnetne energije polja u toplotu. U njemu figurišu imaginarni delovi električne i magnetne propustljivosti. Prema tome, Pointingova teorema u kvazimonohromatska polja ima sledeći oblik

$$\frac{\partial u_{\text{eff}}}{\partial t} + \text{div}\mathbf{S}_p = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} - Q \ . \tag{13.2.44}$$

Prvi član sa desne strane su omski gubici u sredine, a naredni, dat sa (13.2.43) predstavlja takodje toplotne gubitke, ne računajući omske.

13.3 Disperzija električne propustljivosti

U ovom poglavlju analiziraćemo jednostavan klasičan model koji objašnjava disperziju propustljivosti sredine, a u narednom, provodnosti sredine. Za potpuno objašnjenje disperzije potrebno je uključiti zakone kvantne mehanike. Mi to ovde nećemo raditi. Primenićemo Lorencovu elektronsku teoriju po kojoj sila koja efektivno deluje na elektrone u sredini je kvazielastična, tj. data je sa $-m\omega_0^2\mathbf{r}$. Sa ω_0 obeležili smo sopstvenu frekvencu elektrona. Efekat disipacije energije se može fenomenološki modelirati uvodjenjem sile 'trenja' $-m\gamma\dot{\mathbf{r}}$, koja deluje na elektron. Konstanta γ je faktor prigušenja elektrona. Za vezane elektrone ova sila trenja je prevashodno radijacionog tipa. Sila radijacionog kočenja je proporcionalna sa $\dddot{\mathbf{r}}$. Medjutim, $\dddot{\mathbf{r}}$ je proporcionalno sa $\omega^2\dot{\mathbf{r}}$, u odredjenom intervalu frekvenci. Sa druge strane, za slobodne elektrone, sila trenja je vezana za sudare elektrona sa rešetkom i nečistoćama u kristalu. Dakle, član $-m\gamma\dot{\mathbf{r}}$ je efektivna sila koja koči elektrone bilo zbog sudara sa rešetkom, defektima u kristalu, drugim elektronima ili gubicima na zračenje. Prema tome, jednačina kretanja elektrona sredine u elektromagnetnom polju je

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega_0^2\mathbf{r} - e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}) - m\gamma\dot{\mathbf{r}} \ . \tag{13.3.45}$$

Kretanje elektrona je nerelativističko, pa ćemo zanemirati magnetni deo Lorencove sile. Sve veličine ćemo spektralno razložiti:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathbf{r}_\omega e^{-i\omega t} \\ \mathbf{E}(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})\mathbf{e}^{-\mathbf{i\omega t}} \ . \end{aligned} \tag{13.3.46}$$

Furijeove amplitude zadovoljavaju algebarsku jednačinu

$$-m\omega^2\mathbf{r}_\omega = -m\omega_0^2\mathbf{r}_\omega - e\mathbf{E}_\omega + im\omega\gamma\mathbf{r}_\omega \ , \tag{13.3.47}$$

odakle je

$$\mathbf{r}_\omega = \frac{-e\mathbf{E}_\omega}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - im\gamma\omega} \ . \tag{13.3.48}$$

Amplituda električnog dipolnog momenta molekula je

$$\mathbf{p}_\omega = -e\sum_{s=1}^{Z}\mathbf{r}_\omega^s = \sum_{s=1}^{Z}\frac{e^2\mathbf{E}_\omega}{m(\omega_s^2 - \omega^2) - im\gamma_s\omega} \ , \tag{13.3.49}$$

gde smo sumirali po svim elektronima molekula. Svaki elektron ima svoju sopstvenu frekvencu ω_s i faktor prigušenja γ_s. Polarizacija sredine je

$$\mathbf{P}_\omega = \sum_{s=1}^{Z}\frac{e^2 n_a}{m(\omega_s^2 - \omega^2) - im\gamma_s\omega}\mathbf{E}_\omega \ , \tag{13.3.50}$$

gde je n_a koncentracija molekula. Amplituda električne indukcije je

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_\omega &= \varepsilon_0\mathbf{E}_\omega + \mathbf{P}_\omega \\ &= \varepsilon_0\Big(1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0}\sum_{s=1}^{Z}\frac{1}{m(\omega_s^2 - \omega^2) - im\gamma_s\omega}\Big)\mathbf{E}_\omega \ . \end{aligned} \tag{13.3.51}$$

Iz gornjeg izraza direktno možemo da pročitamo propustljivost sredine. Vidimo da je ona data sa

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0}\sum_{s=1}^{Z}\frac{1}{m(\omega_s^2 - \omega^2) - im\gamma_s\omega} \ , \tag{13.3.52}$$

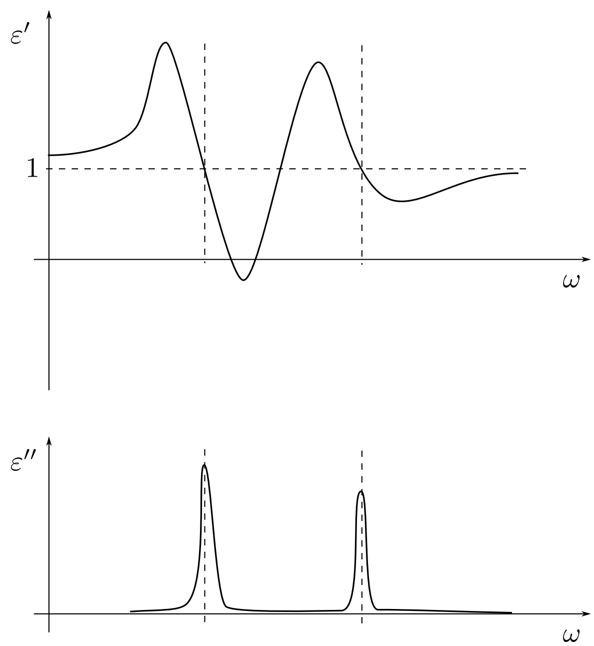
i da zavisi od frekvence. Dielektrična propustljivost je kompleksna funkcija frekvence. Ukoliko su faktori prigušenja mali, $\gamma_s \ll 1$, onda je dielektrična propustljivost

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0 m}\sum_{s=1}^{Z}\frac{1}{\omega_s^2 - \omega^2} \tag{13.3.53}$$

realna. Iz (13.3.53) vidimo da propustljivost sredine divergira kada se frekvenca polja izjednači sa nekom od sopstvenih frekvenci oscilovanja elektrona. Ova singulartnost je odsutna ako su faktori prigušenja različiti od nule. Iz (13.3.52) dobijamo realni i imaginarni deo dielektrične propustljivosti:

$$\begin{aligned}\varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0 m}\sum_{s=1}^{Z}\frac{\omega_s^2 - \omega^2}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + \gamma_s^2\omega^2} \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0 m}\sum_{s=1}^{Z}\frac{\omega\gamma_s}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + \gamma_s^2\omega^2} \ . \end{aligned} \tag{13.3.54}$$

Vidimo da je realni deo propustljivosti parna, a imaginarni neparna funkcija frekvence, kao što očekujemo na osnovu opštih razmatranja. Realni i imaginarni deo propustljivosti sredine



Slika 13.1: Realni i imaginarni delovi dielektrične propustljivosti.

prikazane su na slici 13.1. Uzeli smo da postoje dve rezonatne frekvence: ω_1 i ω_2. Pri niskim frekvencama dielektrična propustljivost postaje

$$\varepsilon(0) = 1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0 m} \sum_{s=1}^{Z} \frac{1}{\omega_s^2} \ , \tag{13.3.55}$$

što je statička propustljivost. Za visoke frekvence propustljivost teži jedinici. Realni deo propustljivosti ima maksimume u okolini rezonatnih frekvenci. U oblasti frekvenci gde je realni deo propustljivosti rastuća funkcija frekvence, $\frac{\mathrm{d}\varepsilon'(\omega)}{\mathrm{d}\omega} > 0$ govorimo o normalnoj disperziji. Sa druge strane kada je $\frac{\mathrm{d}\varepsilon'(\omega)}{\mathrm{d}\omega} < 0$ govorimo o anomalnoj disperziji, jer se svetlost veće frekvence manje prelama od svetlosti manje frekvence.

Imaginarni deo propustljivosti $\varepsilon''(\omega)$ različit je od nule u uskim oblastima oko rezonatnih frekvenci. Kao što se vidi sa slike 13.1 imaginarni deo propustljivosti ima oštre maksimume za rezonatne frekvence. Sa slike 13.1 je jasno da se anomalna disperzija javlja u uskoj oblasti oko rezonatnih frekvenci. U tim oblastima imaginarni deo propustljivosti je različit od nule, i tu dolazi do prigušenja talasa.

13.4 Disperzija provodnosti

Sumu po svim elektronima u izrazu za propustljivost (13.3.52) podelićemo na dve sume. U prvoj sumi sumiraćemo po vezanim elektronima, a u drugoj po slobodnim elektronima. Doprinos vezanih elektrona je dielektrična propustljivost sredine, $\varepsilon(\omega)$, dok ceo izraz (13.3.52) predstavlja efektivnu propustljivost. Neka je f_0 deo elektrona po atomu odnosno molekulu koji je slobodan. Sopstvena frekvenca slobodnih elektrona je jednaka nuli, dok je njihov faktor prigušenja γ. Prema tome

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 + \frac{e^2 n_a}{\varepsilon_0 m} \sum_{\text{vez}} \frac{1}{\omega_s^2 - \omega^2 - i\gamma_s\omega} + \frac{ie^2 n_a f_0}{m\varepsilon_0\omega(\gamma - i\omega)} \ . \tag{13.4.56}$$

Dakle,

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = \varepsilon(\omega) + i\frac{e^2 n_{\text{sl}}}{\varepsilon_0 m(\omega\gamma - i\omega^2)} \ , \tag{13.4.57}$$

gde je $n_{\text{sl}} = f_0 n_a$ koncentracija slobodnih elektrona.

Poredjenjem sa (13.1.19) dobijamo provodnost sredine

$$\sigma(\omega) = \frac{e^2 n_{\text{sl}}}{m\gamma\left(1 - i\frac{\omega}{\gamma}\right)} \ . \tag{13.4.58}$$

Kod stacionarnih sredina sa vremenskom disperzijom provodnost postaje frekventno zavisna. Koncentracija jona bakra je $n = 8 \cdot 10^{28}\text{m}^{-3}$, provodnost pri niskim frekvencama je $\sigma \approx 5,5 \cdot 10^7(\Omega\text{m})^{-1}$. Ukoliko uzmemo $f = 1$ faktor prigušenja je $\gamma \approx 4 \cdot 10^{13}\text{s}^{-1}$ Za frekvence ispod 10^{11}s^{-1} (mikrotalasna oblast) provodnost je realna, tj. struja je u fazi sa naponom. Za više frekvence provodnost postaje kompleksna.

Sada ćemo formulu za frekventnu zavisnost provodnosti (13.4.58) izvesti na još jedan način. Krenućemo od jednačine kretanja slobodnih elektrona

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\mathbf{E} - m\gamma\dot{\mathbf{r}} \ . \tag{13.4.59}$$

Faktor prigušenja slobodnih elektrona predstavlja efektivnu kolizionu frekvencu, tj. broj sudara elektrona sa jonima u jedinici vremena. Nakon spektralnog razlaganja jednačine kretanja dobijamo

$$-im\omega\mathbf{v}_\omega = -e\mathbf{E}_\omega - m\gamma\mathbf{v}_\omega \ , \tag{13.4.60}$$

gde je $\mathbf{v}_\omega$ Furijeova amplituda brzine elektrona. Furijeova amplituda gustine električne struje je

$$\mathbf{j}_\omega = -en_{\text{sl}}\mathbf{v}_\omega = \frac{n_{\text{sl}}e^2}{m\gamma}\frac{1 + i\frac{\omega}{\gamma}}{1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}}\mathbf{E}_\omega \ . \tag{13.4.61}$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da je provodnost sredine data sa

$$\sigma(\omega) = \sigma(0)\frac{1 + i\frac{\omega}{\gamma}}{1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}} \ , \tag{13.4.62}$$

gde je

$$\sigma(0) = \frac{n_{\text{sl}}e^2}{m\gamma} \tag{13.4.63}$$

statička provodnost. Dobijeni rezultat je identičan sa ranije dobijenim rezultatom (13.4.58) za provodnost. Sredina sa slobodnim elektronima je provodnik u oblasti niskih frekvenci, tj. za $\omega \to 0$. Tada je efektivna dielektrična propustljivost data sa

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = \frac{i\sigma(0)}{\varepsilon_0 \omega} \ , \tag{13.4.64}$$

i kao što vidimo divergira. Na visokim frekvencama provodnost se ponaša kao

$$\sigma(\omega) \to i\frac{e^2 n_{\text{sl}}}{m\omega} \ , \tag{13.4.65}$$

a efektivna propustljivost

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{eff}}(\omega) &= 1 - \frac{e^2 n_{\text{vez}}}{m\varepsilon_0\omega^2} - \frac{e^2 n_{\text{sl}}}{m\varepsilon_0\omega^2} \\ &= 1 - \frac{e^2 n}{m\varepsilon_0\omega^2} \ , \end{aligned} \tag{13.4.66}$$

gde je $n = n_{\text{sl}} + n_{\text{vez}}$ ukupna gustina elektrona. Na visokim frekvencama slobodni i vezani elektroni se ponašaju na isti način. To se vidi iz izraza za efektivnu propustljivost gde oni ulaze ravnopravno. Gornji izraz ćemo prepisati u obliku

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ , \tag{13.4.67}$$

gde je

$$\omega_p^2 = \frac{e^2 n}{\varepsilon_0 m} \tag{13.4.68}$$

plazmena frekvenca[1]. Fazna brzina talasa u oblasti visokih frekvenci je

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} \ . \tag{13.4.70}$$

Odavde dobijamo disperzionu relaciju sredine u toj oblasti

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2 \ . \tag{13.4.71}$$

Nadjite grupnu brzinu iz ovog rezultata.

---

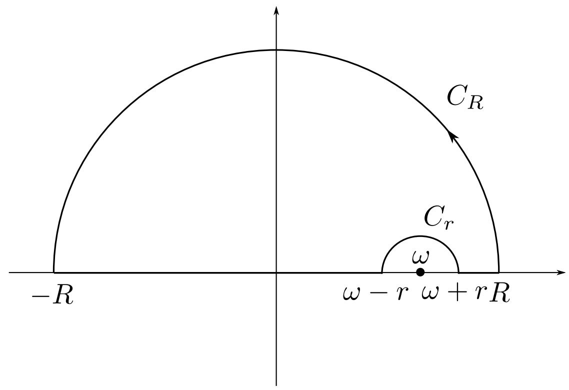
[1]Plazma se sastoji od slobodnih elektrona i jona. Koncentracijui elektrona obeležićemo sa n. Zamislimo da je jonski podsistem nepokretan. Kada se elektronski podsistem izvede iz ravnotežnog položaja za Δx na levom odnosno desnom kraju, stvara se površinsko naelektrisanje $\pm ne\Delta x$. Ovo nelektrisanje kreira polje $E = \frac{ne\Delta x}{\varepsilon_0}$ koje na elektron deluje elastičnom silom

$$F = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0}\Delta x \ .$$

Elektronski podsistem osciluje sa frekvencom

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \tag{13.4.69}$$

koja se naziva plazmena frekvenca.



Slika 13.2: Kontura integracije

13.5 Kramers-Kronigove relacije

Dielektrična propustljivost sredine je kompleksna funkcija realnog argumenta ω. Medjutim na osnovu teorije analitičkih funkcija možemo napraviti analitičko produženje ove funkcije na celu kompleksnu $\omega-$ravan. U okviru jednostavnog Lorencovog modela vidimo da su polovi dielektrične propustljivosti (13.3.52) odredjeni sa

$$\omega^2 + i\omega\gamma_s - \omega_s^2 = 0 \; . \tag{13.5.72}$$

Lako se vidi da su oni

$$\omega_{1,2} = -i\frac{\gamma_s}{2} \pm \sqrt{\omega_s^2 - \frac{\gamma_s^2}{4}} \; . \tag{13.5.73}$$

Dalje ćemo analizirati neprovodne sredine. Ako je $\omega_s^2 > \frac{\gamma_s^2}{4}$ polovi dielektrične propustljivosti su u donjoj kompleksnoj ω poluravni. Ako je $\omega_s^2 < \frac{\gamma_s^2}{4}$ polovi su opet u donjoj poluravni i imaginarni su. Funkciju $F(t-t')$ u izrazu (13.1.1) napisaćemo u obliku

$$F(t-t') = 2\delta(t-t') + G(t-t') \; , \tag{13.5.74}$$

gde smo uveli novu funkciju $G(t-t')$. Elektrodinamička jednačina stacionarnih sredina sa vremenskom disperzijom (13.1.1) postaje

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r}) = \varepsilon_0\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) + \varepsilon_0\int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' G(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t') \; . \tag{13.5.75}$$

Uvodjenjem step-funkcije $\eta(t-t')$ oblast integracije proširujemo na celu vremensku osu:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(t,\mathbf{r}) &= \varepsilon_0\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) + \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' G(t-t')\eta(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t') \\ &= \varepsilon_0\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) + \varepsilon_0\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \chi(t-t')\mathbf{E}(\mathbf{r},t') \; , \end{aligned} \tag{13.5.76}$$

gde je $\chi(t-t') = G(t-t')\eta(t-t')$. Lako se vidi da je

$$\chi(\omega) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau G(\tau) e^{i\omega\tau} \ , \tag{13.5.77}$$

pa je

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty \mathrm{d}\tau G(\tau) e^{i\omega\tau} \ . \tag{13.5.78}$$

Na vrednost vektora električne indukcije u trenutku t najviše utiču vrednosti polja u trenucima t' bliskim t. Zato je funkcija $G(\tau)$ konačna i teži nuli za $\tau \to \infty$. Iz (13.5.78) sledi da dielektrična propustljivost u kompleksnoj $\omega-$ravni zadovoljava

$$(\varepsilon(\omega))^* = \varepsilon(-\omega^*) \ . \tag{13.5.79}$$

Pri visokim realnim frekvencama podintegralna funkcija u (13.5.78) brzo osciluje pa taj integral teži nuli. Najveći doprinos integralu potiče od malih vrednosti τ. Realni i imaginarni deo propustljivosti se ponašaju prema

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + \frac{d_2}{\omega^2} + \dots \\ \varepsilon''(\omega) &= \frac{d_3}{\omega^3} \ , \end{aligned} \tag{13.5.80}$$

gde su d_2, d_3 konstante. Za male realne frekvence ω realni i imaginarni delovi propustljivosti su

$$\begin{aligned} \varepsilon'(\omega) &= 1 + c_0 + c_2\omega^2 + \dots \\ \varepsilon''(\omega) &= c_1\omega + \dots \ , \end{aligned} \tag{13.5.81}$$

gde c_0, c_1 i c_2 su konstante. Statička propustljivost je $\varepsilon(0) = 1 + c_0$.

Već smo rekli da ćemo dielektričnu propustljivost $\varepsilon(\omega)$ analitički produžiti na kompleksnu ravan, tj. stavićemo $\omega = \omega' + i\omega''$ u izraz (13.5.78). Tako dobijamo

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty G(\tau) e^{i\tau\omega' - \tau\omega''} \ . \tag{13.5.82}$$

Zbog kauzalnosi je $t > t'$ pa je $\tau = t' - t > 0$. U gornjoj poluravni, $\omega'' > 0$ podintegralna funkcija ne divergira. Situacija je drugačija za negativne vrednosti ω''; tada za velike frekvence dielektrična propustljivost postaje beskonačna. Dakle, dielektrična propustljivost neprovodne sredine je analitička funkcija na realnoj osi i u gornjoj poluravni. Takodje za veliko $|\omega|$ ona teži nuli.

Posmatrajmo integral

$$I(\omega) = \oint_C \frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega} \mathrm{d}z \ , \tag{13.5.83}$$

gde je kontura integracije zadata na slici 13.2. Kontura integracije C sastoji se od integracije od $-R$ do $\omega - r$ i od $\omega + r$ do R po realnoj osi, malog polukruga C_r poluprečnika r i velikog polukruga poluprečnika R. Primenom Košijeve teorema o rezidumima

$$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}_k f(z) \tag{13.5.84}$$

imamo

$$\int_{-R}^{\omega-r} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} + \int_{C_r} \frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega}\mathrm{d}z + \int_{\omega+r}^{R} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} + \int_{C_R} \frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega}\mathrm{d}z = 0 \qquad (13.5.85)$$

Jasno je da za veliko R integral $\int_{C_R}$ teži nuli, jer za veliko $|z|$ imamo

$$\frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega} \sim \frac{\frac{1}{|z|^2}}{|z|} \to 0 \ . \qquad (13.5.86)$$

Integral po malom polukrugu C_r za $r \to 0$ je

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega}\mathrm{d}z &= \int_{\pi}^{0} \frac{\varepsilon(\omega + re^{i\phi})-1}{re^{i\phi}} re^{i\phi} i\phi \\ &= -i\pi(\varepsilon(\omega)-1) \ . \end{aligned} \qquad (13.5.87)$$

Dalje je

$$\lim_{r\to 0}\Big(\int_{-\infty}^{\omega-r} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} + \int_{\omega+r}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} \Big) = P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} \ , \qquad (13.5.88)$$

gde je P oznaka za glavnu vrednost integrala[2]. Dakle, dobijamo

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon(x)-1}{x-\omega} = i\pi(\varepsilon(\omega)-1) \ . \qquad (13.5.90)$$

Ako napišemo $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ onda iz (13.5.90) sledi

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon''(x)}{x-\omega} \qquad (13.5.91)$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon'(x)-1}{x-\omega} \ . \qquad (13.5.92)$$

Dobijeni izrazi su Kramers-Kronigove disperzione relacije. One su posledica kauzalnosti i povezuju realni sa imaginarnim delom dielektrične propustljivosti. Dakle realni i imaginarni deo propustljivosti nisu nezavisni. Znajući imaginarni deo propustljivosti možemo odrediti realni deo.

Prethodno izvodjenje pokazuje da je

$$\frac{1}{x \pm i\delta} = P\Big(\frac{1}{x}\Big) \mp i\pi\delta(x) \ , \qquad (13.5.93)$$

[2] Glavna vrednost integrala je definsana sa

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\int_{-\infty}^{x_0-\varepsilon} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\varepsilon}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x-x_0} \Big] \ .$$

Npr. pokažite da je

$$P\int_{2}^{5} \frac{\mathrm{d}x}{x-3} = \ln 2 \ . \qquad (13.5.89)$$

gde $\delta \to 0$. Gornja formula važi pod integralom kada deluje na analitičku funkciju $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x \pm i\delta} = P \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{f(x)}{x} \mp i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x f(x)\delta(x) \ . \tag{13.5.94}$$

Primenom gornje formule možemo eliminisati glavnu vrednosti integrala u (13.5.91). Tako dobijamo

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega - i\delta} \ . \tag{13.5.95}$$

13.6 Ravan monohromatski talas u sredini sa disperzijom

U ovom poglavlju analiziraćemo prostiranje ravnog momohromatskog talasa u beskonačnoj sredini sa frekventnom disperzijom. Pretpostavićemo da je sredina stacionarna, izotropna i homogena. Furijeove amplitude polja, $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}), \mathbf{B}_\omega(\mathbf{r}), \ldots$ zadovoljavaju jednačine (13.1.18). Pored toga zanemarićemo disperziju magnetne permeabilnosti. Za ravan monohromatski talas polja su oblika

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{B}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{D}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{D}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ \mathbf{H}(t,\mathbf{r}) &= \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \ , \end{aligned}$$

gde smo sa indeksom 0 obeležili odgovarajuće amplitude. Frekvenca talasa je ω, a talasni vektor je $\mathbf{k}$. Amplitude zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$\begin{aligned} &\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \ , \\ &\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \ , \\ &\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \ , \\ &\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega}{c^2} \epsilon_{\text{eff}}(\omega) \mathbf{E}_0 \ . \end{aligned} \tag{13.6.96}$$

Jednačine za amplitude polja su algebarske. U prethodnom računu činjenica da efektivna propustljivost ne zavisi od tačke posmatranja $\mathbf{r}$, tj. da je sredina homogena dovela je do jednostavnih jednačina za amplitude polja.

Ako treću jednačinu u (13.6.96) vektorski sa leve strane pomnožimo talasnim vektorom $\mathbf{k}$ dobijamo

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\text{eff}}(\omega) \mathbf{E}_0 = 0 \ , \tag{13.6.97}$$

gde smo iskoristili poslednju Maksvelovu jednačinu iz (13.6.96). Ako sada primenimo i prvu od ovih jednačina dobijamo

$$\Big[-\mathbf{k}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\text{eff}}(\omega) \Big] \mathbf{E}_0 = 0 \ . \tag{13.6.98}$$

Iz (13.6.98) sledi disperziona relacija

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \ . \tag{13.6.99}$$

Sada prelazimo na rešavanje disperzione relacije. Možemo pretpostaviti da je frekvenca talasa ω poznata i realna. Ova situacija odgovara slučaju kada talas frekvence ω pada iz vakuuma u sredinu. Onda is disperzione relacije (13.6.99) dobijamo talasni vektor koji je u opštem slučaju kompleksan $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Vektori $\mathbf{k}'$ i $\mathbf{k}''$ su realni. Iz disperzione relacije sledi

$$\mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 + 2i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'' = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\text{eff}}(\omega) \tag{13.6.100}$$

Iz ovog izraza vidimo da je

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'^2 - \mathbf{k}''^2 &= \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon'_{\text{eff}}(\omega) \\ \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'' &= \frac{\omega^2}{2c^2}\epsilon''_{\text{eff}}(\omega) \ . \end{aligned} \tag{13.6.101}$$

Talasni vektor $\mathbf{k}$ je realan ukoliko je effektivna propustljivost realna i pozitivna. Posebno treba ispitati situaciju kada su vektori $\mathbf{k}'$ i $\mathbf{k}''$ medjusobno ortogonalni jer je i tada uslov $\epsilon''_{\text{eff}} = 0$ zadovoljen, a talasni vektor nije realan. Talas čiji je talasni vektor kompleksan u opštem slučaju nije ravan talas. Komponente polja su proporcionalne sa

$$e^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}e^{-i(\omega t - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r})} \ . \tag{13.6.102}$$

Iz ovog izraza je jasno da su ravni ortogonalne na $\mathbf{k}'$ ravni konstantne faze, a ravni ortogonalne na $\mathbf{k}''$ su ravni iste amplitude talasa. Skup tačaka sa istom vrednošću polja za fiksno t nisu ravni, pa se ovakav talas samo uslovno naziva ravnim. Faza talasa se prostire duž pravca $\mathbf{k}'$, dok duž prvaca $\mathbf{k}''$ amplituda talasa opada. Ovakav talas je samo uslovno ravan i često se naziva 'nehomogen ravan talas'. Pretpostavićemo da su vektori $\mathbf{k}'$ i $\mathbf{k}''$ medjusobno paralelni. Ovakav talas je ravan u pravom smislu te reči. Dakle, posmatramo situaciju gde je $\mathbf{k} = k\mathbf{e}$, gde je $\mathbf{e}$ jedinični realni vektor. Električno polje ravanog monohromatskog talas je onda

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} = \mathbf{E}_0 e^{-k''\mathbf{e}\cdot\mathbf{r}}e^{-i(\omega t - k'\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})} \ . \tag{13.6.103}$$

Iz ovog izraza vidimo da ampliltuda talasa opada sa rastojanjem ($k'' > 0$), tj. dolazi do prigušenja talasa u sredini. Prigušenje talasa vezano je za imaginarni deo talasnog vektora. Realni deo talasnog vektora ulazi u fazu talasa pa je fazna brzina data sa

$$v_f = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{n'} \ , \tag{13.6.104}$$

gde je n' indeks prelamanja. Kompleksni indeks prelamanja $n = n' + in''$ je definisan sa

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{\text{eff}}(\omega)} = \frac{\omega}{c}(n' + in'') \ . \tag{13.6.105}$$

Iz

$$\varepsilon'_{\text{eff}} + i\varepsilon''_{\text{eff}} = n'^2 - n''^2 + 2in'n'' \tag{13.6.106}$$

sledi da su realni i imaginarni delovi kompleksnog indeksa prelamanja dati sa

$$\begin{aligned} n' &= \sqrt{\frac{\varepsilon'_{\text{eff}} + \sqrt{\varepsilon'^2_{\text{eff}} + \varepsilon''^2_{\text{eff}}}}{2}} \\ n'' &= \sqrt{\frac{-\varepsilon'_{\text{eff}} + \sqrt{\varepsilon'^2_{\text{eff}} + \varepsilon''^2_{\text{eff}}}}{2}} \; . \end{aligned} \tag{13.6.107}$$

Realni deo kompleksnog indeksa prelamanja, n' zvaćemo samo indeksom prelamanja. Imaginarni deo kompleksnog indeksa prelamanja, n'' vezan je sa koeficijentom apsorpcije

$$\alpha = 2\frac{\omega n''}{c} = 2k'' \; . \tag{13.6.108}$$

Intenzitet talasa opada kao $e^{-2k''(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})}$. Do prigušenja talasa dolazi u oblasti frekvenci gde je imaginarni deo efektivne propustljivosti različit od nule. Ali, i kada je imaginarni deo propustljivosti jednag nuli, a realni negativan amplituda talasa će opadati. Ovaj slučaj ćemo kasnije detaljnije komentarisati.

Indeks prelamanja i koeficijent apsorpcije zavise od frekvence talasa. Iz izraza za električno polje (13.6.103) i treće Maksvelove jednačine dobijamo magnetno polje

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{k}{\omega}\mathbf{e}\times\mathbf{E} \\ &= \frac{1}{c}\sqrt{n'^2 + n''^2}e^{i\arctan\frac{n''}{n'}}\mathbf{e}\times\mathbf{E} \; . \end{aligned} \tag{13.6.109}$$

Električno i magnetno polje talasa u homogenoj izotropnoj stacionarnoj sredini sa vremenskom disperzijom nisu u fazi.

Pri niskim frekvencama za metale, tj. za $\omega \ll \gamma$, je $\varepsilon'_{\text{eff}} \approx 0$ i $\varepsilon''_{\text{eff}} = \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0\omega}$. Imaginarni deo efektivne propustljivosti nije zanemarljiv u odnosu na realni pa su metali na niskim frekvencama neprozračni (netransparentni). Realni i imaginarni delovi komleksnog indeksa prelamanja su

$$n' = n'' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0\omega}} \; . \tag{13.6.110}$$

Lako se vidi da je

$$n' = n'' \approx \frac{c}{\omega\delta} \; ,$$

gde je δ debljina skin sloja. Električno polje talasa koji se prostire duž $z-$ ose je

$$\mathbf{E}(t,z) = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{z}{\delta}} e^{-i(\omega t - \frac{z}{\delta})} \; . \tag{13.6.111}$$

Talas praktično ne propagira kroz metal, jer ga slobodni elektroni apsorbuju. Fazna razlika izmedju električnog i magnetnog polja u ovom slučaju je $\pi/4$.

U oblasti visokih frekvenci, $\gamma \ll \omega$ efektivna propustljivost je oblika

$$\varepsilon_{\text{eff}}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \ . \tag{13.6.112}$$

Elektronski gas u metalu se ponaša slično plazmi. Ako je $\omega > \omega_p$ talasni vektor je realan, tj. metal je transparentan. Sa druge strane za frekvence koje su manje od plazmene talasni vektor je čisto imaginaran.Očekivali bi da se talas jako prigušuje u metalu. Medjutim, talas ne prodire u metal, već se kompletno reflektuje od njegove površine. Drugim rečima talas se ne apsorbuje u provodniku, jer i ne prodire u njega. Plazmena frekvenca u metalima je reda $\omega_p \approx 10^{16}$Hz, što pripada ultravioletnom delu spektra. Iz tog razloga vidljiva svetlost se reflektuje od površine metala. Sličan efekat se javlja u gornjim slojevima atmosfere, jonosferi. Tu je $\omega_p \approx 10^7$Hz . Kratki radio talasi se reflektuju od ove oblasti.

Za prozračne sredine indeks prelamanja je $n' \approx \sqrt{\varepsilon'_{\text{eff}}}$, dok je

$$n'' = \frac{\varepsilon''_{\text{eff}}}{2\sqrt{\varepsilon'_{\text{eff}}}} \tag{13.6.113}$$

Sredina je nedisipativna.

13.7 Talasni paket i grupna brzina

Realni izvori elektromagnetnih talasa ne generišu talase tačno odredjene frekvence i talasnog vektora. Ove veličine su uvek unutar nekog, u najboljem slučaju uskog, intervala frekvenci odnosno talasnog vektora. Superpozicija ravnih monohromatskih talasa koja je lokalizovana u prostoru (slika 13.3) naziva se talasnim paketom. Pretpostavićemo da je talasni vektor svakog ravnog talasa realan, a da iz disperzione relacije (13.6.99) nalazimo frekvencu talasa. Zbog linearnosti Maksvelovih jednačina sledi da je rešenje za električno polje superpozicija ravnih talasa

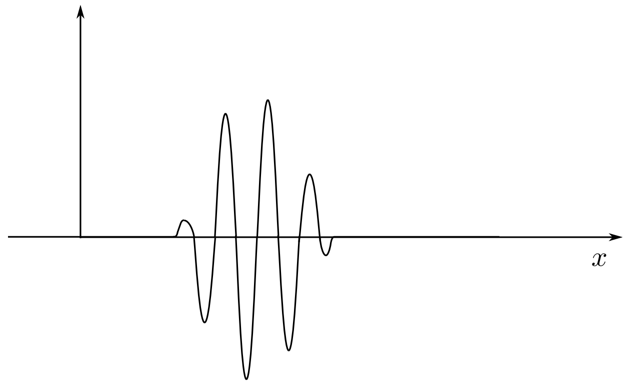
$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathrm{d}^3k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t)} \tag{13.7.114}$$

Da bismo dobili talasni paket uzećemo da su talasni vektori unutar intervala $(\mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}, \mathbf{k}_0 + \Delta\mathbf{k})$. Električno polje je

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \int_{\mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}}^{\mathbf{k}_0 - \Delta\mathbf{k}} d^3k \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \mathbf{e}^{-\mathbf{i}(\omega(\mathbf{k})\mathbf{t} - \mathbf{kr})} \ , \tag{13.7.115}$$

gde su ampiltude $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ dobro lokalizovane u $\mathbf{k}$ prostoru i imaju pik za $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Jednostavnosti radi uzećemo $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$. Disperzionu relaciju ćemo razviti u red oko k_0 uz zanemarivanje viših članova

$$\omega(k) = \omega(k)_0 + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 (k - k_0) \ . \tag{13.7.116}$$



Slika 13.3:

Električno polje talasnog paketa je prema tome

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} dk \mathbf{E}_{k_0} e^{-i(\omega(k_0)t-k_0 x)} e^{-i\left(\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t-x\right)(k-k_0)} \\ &= \mathbf{E}_{k_0} \frac{2\sin\left((\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t-x)\frac{\Delta k}{2}\right)}{\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t-x} e^{-i(\omega(k_0)t-k_0 x)} \ . \end{aligned} \tag{13.7.117}$$

Vidimo da amplituda talasnog paketa ima oštar maksimum. Položaj ovog maksimuma odredjen je sa

$$\frac{d\omega}{dk}\Big|_0 t - x = \text{const.} \tag{13.7.118}$$

Grupna brzina je definisana kao brzina pomeranja ovog maksimuma

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} \ . \tag{13.7.119}$$

Različite monohromatske komponente u talasnom paketu imaju različite fazne brzine zbog disperzije. Grupna brzina govori o kretanju paketa kao celine. U opštem slučaju grupna brzina je

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} \ . \tag{13.7.120}$$

Za izotropne sredine je $\omega = \omega(k)$, tj. frekvenca talasa zavisi od intenziteta talasnog vektora. Ako je sredina prozračna tj. $\epsilon''_{\text{eff}}(\omega) \approx 0$ onda je ω realno pa su grupna i fazna brzina date sa

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g &= \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{d\omega}{dk}\frac{\mathbf{k}}{k} \\ \mathbf{v}_f &= \frac{\omega}{k}\frac{\mathbf{k}}{k} = \frac{n}{c}\frac{\mathbf{k}}{k} \ . \end{aligned} \tag{13.7.121}$$

Pointigov vektor (pravac prostiranja zraka) je takodje kolinearan sa $\mathbf{k}$. Iz $\omega = kv_f$ sledi

$$v_g = v_f + k\frac{dv_f}{dk} \tag{13.7.122}$$

odakle se dobija

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \ . \tag{13.7.123}$$

Ukoliko je $\frac{dn}{d\omega} > 0$ (normalna disperzija) tada je $v_g < v_f$. U slučaju anomalne disperzije $\frac{dn}{d\omega} < 0$ grupna brzina je veća od fazne. Tada grupna brzina može biti veća od brzine svetlosti. Medjutim u oblasti anomalne disperzije razvoj (13.7.116) nije opravdan jer se viši članovi ne mogu zanemariti i to je razlog što smo dobili nefizički rezultat koji bi bio u suprotnosti sa specijalnom teorijom relativnosti.

13.8 Sredine sa prostorno–vremenskom disperzijom

Do sada smo razmatrali sredine sa vremenskom disperzijom, što je najčešći tip disperzije kod materijalnih sredina. Kada je talasna dužina elektromagnetnog polja reda veličine karakteristične dužine sredine prostorna disperzija takodje postaje značajna. Elektrodinamička reakcija sredine u tački $\mathbf{r}$ zavisi od polja u okolnim tačkama. Prostorna disperzija je prostorna nelokalnost. Ranije smo objasnili da vremenska disperzija uvek prati prostornu disperziju. Supstancijalne jednačine sredine sa prostorno-vremenskom disperzijom su date sa

$$\begin{aligned}
D_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 r' F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(t', \mathbf{r}') \\
B_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 r' G_{ij}(R - \mathbf{r}', t - t') H_j(t', \mathbf{r}') \\
j_i(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 r' K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(t', \mathbf{r}') \ .
\end{aligned}$$

Ove formule se odnose na sredinu koja pored osobina koje smo naveli je stacionarna i homogena. Prostorna disperzija je značajna kod sredina u kojima su prisutna slobodna naelektrisanja. Slobodna naelektrisanja pri termalnom kretanju sa jednog na drugo mesto sredine nose informaciju o elektrodinamičkoj situaciji. Ovaj efekat je izražen u plazmi. Postupajući kao u slučaju vremenske disperzije supstancijalne jednačine se mogu napisati tako da se integrali po celoj vremenskoj osi, npr.

$$D_i(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t' \int \mathrm{d}^3 \mathbf{r}' \varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(t', \mathbf{r}') \ , \tag{13.8.124}$$

gde je $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = F_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')\eta(t - t')$. Električno polje $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ i ε_{ij} ćemo razložiti u Furijeove integrale

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{R^3} d^3 k \mathbf{E}_{\omega \mathbf{k}} e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\
\varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \int_{R^3} d^3 k \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) e^{-i(\omega t - i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \ .
\end{aligned} \tag{13.8.125}$$

Zamenom (13.8.125) u (13.8.124) dobijamo

$$D_i(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_j(\omega, \mathbf{k}) \ . \tag{13.8.126}$$

Kod sredina sa prostorno–vremenskom disperzijom dielektrična propustljivost zavisi od frekvence i od talasnog vektora. Sredine sa prostornom disperzijom su anizotropne. Anizotropija potiče od same činjenice da dielektrična odnosno magnetna propustljivost kao i provodnost zavise od talasnog vektora. Dielektrična propustljivost nije skalar već je simetričan tenzor konstruisana od Kronekerove delte i simetrične kombinacije talasnog vektora, $k_i k_j / k^2$. Sasvim generalno tenzor propustljivosti ima sledeći oblik

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{\mathrm{tr}}(k, \omega)\Big(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\Big) + \varepsilon_{\mathrm{l}}(k, \omega) \frac{k_i k_j}{k^2} \ . \tag{13.8.127}$$

Veličine $\varepsilon_{\mathrm{tr}}(k, \omega)$ i $\varepsilon_{\mathrm{l}}(k, \omega)$ su skalarne funkcije koje nazivamo trasverzalnom odnosno longitudinalnom propustljivošću. Izrazi $\delta_{ij} - k_i k_j / k^2$ i $k_i k_j / k^2$ su transverzalni odnosno longitudinalni projektori.

Jedan od važnih primera prostorno–vremenske disperzije je optička aktivnost. Kod sredina sa slabom prostornom disperzijom tenzor propustljivosti može se razložiti u red po stepenima talasnog vektora

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega) + i\gamma_{ijm}(\omega) k^m + \dots \ . \tag{13.8.128}$$

Mi se nećemo dalje upustati u analizu elektrodinamike ovakvih sredina. Mnogo više detalja možete naći u [3] i [4].

Glava 14

Ravan monohromatski talas u anizotropnim sredinama

U prvom poglavlju ove glave proučavamo prostiranje ravnog monohromatskog talasa kroz kristal. Analiza se uglavnom odnosi na tzv. jednoosne kristale. U drugom poglavlju se analizira uticaj stalnog spoljašnjeg magnetnog polja na elektrodinamičke karakteristike sredine. Pokazaćemo da usled prisustva spoljašnjeg magnetnog polja sredina postaje anizotropna. Zatim se analizira obrtanje ravni polarizovane svetlosti koja se propušta kroz ovu sredinu.

14.1 Prostiranje kroz prozračan kristal

Razmatraćemo prostiranje ravnog monohromatskog talasa kroz dielektrik koji je prozračan, anizotropan, homogen i stacionaran sa vremenskom disperziom. Dielektrična propustljivost je realna simetrična matrica $\varepsilon_{ij}(\omega)$ koja zavisi od frekvence. U daljem tekstu nećemo eksplicitno pisati zavisnost komponenti dielektričnog tenzora od frekvence jer razmatramo prostiranje talasa zadate frekvence. Pošto je $\hat{\varepsilon}$ simetričan tenzor možemo ga dijagonalizovati. Tako prelazimo u sistem glavnih osa ovog tenzora gde je taj tenzor dat sa

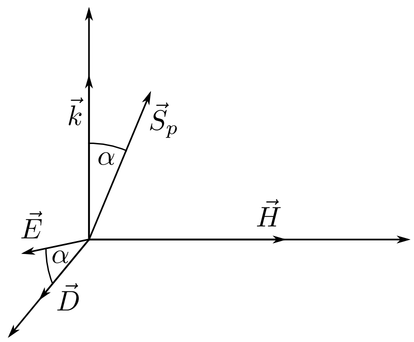
$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} . \tag{14.1.1}$$

Takodje uzećemo da je $\mu \approx 1$, pa jednačine sredine imaju oblik

$$\begin{aligned} D_i &= \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j \\ B_i &= \mu_0 H_i \, . \end{aligned} \tag{14.1.2}$$

Zamenom izraza koji karakterišu ravan monohromatski talas

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \ \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}, \ \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \end{aligned} \tag{14.1.3}$$



Slika 14.1: Električno polje leži u ravni koju odredjuju talasni vektor i vektor električne indukcije.

u Maksvelove jednačine dobijamo

$$\begin{aligned}\mathbf{k}\cdot\mathbf{D} &= 0\\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0\\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{H} &= -\omega\mathbf{D}\ .\end{aligned} \tag{14.1.4}$$

Vektori električne i magnetne indukcije i jačine magnetnog polja su ortogonalni na talasni vektor $\mathbf{k}$. Vektor jačine električnog polja nije ortogonalan na talasni vektor. Množenjem treće i četvrte Maksvelove jednačine skalarno sa $\mathbf{E}$, odnosno $\mathbf{B}$ dobijamo $\mathbf{H}\cdot\mathbf{E}=0$, odnosno $\mathbf{H}\cdot\mathbf{D}=0$. Dakle, jačina magnetnog polja je ortogonalna na jačinu električnog polja i na vektor električne indukcije. Jačina električnog polja leži u $\mathbf{k},\mathbf{D}$ ravni. Pointingov vektor

$$\mathbf{S}_p=\mathbf{E}\times\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0\omega}(\mathbf{E}^2\mathbf{k}-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}) \tag{14.1.5}$$

nije kolinearan sa talasnim vektorom (slika 14.1). Pointingov vektor je pravac prostiranja zraka u kristalu i on se ne poklapa sa pravcem prostiranja talasa. Množenjem treće Maksvelove jednačine vektorski sa $\mathbf{k}$ dobijamo

$$\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E})=-\mu_0\varepsilon_0\omega^2\hat{\varepsilon}\mathbf{E}\ , \tag{14.1.6}$$

gde smo primenili treću Maksvelovu jednačinu. Razvijanjem dvostrukog vektorskog proizvoda dolazimo do

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{k}-k^2\mathbf{E}=-\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}\mathbf{E}\ . \tag{14.1.7}$$

Projektovanjem gornje jednačine na ose Dekartovog sistema dobijamo

$$k^2E_i-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})k_i=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij}E_j\ , \tag{14.1.8}$$

odnosno

$$(k^2\delta_{ij}-k_ik_j-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij})E_j=0\ . \tag{14.1.9}$$

Talasni vektor predstavićemo u obliku $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}} = k(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \hat{k}_3)$, gde je $\hat{\mathbf{k}}$ ort usmeren duž talasnog vektora. Deljenjem gornjih jednačina sa k^2 dobijamo

$$(\delta_{ij} - \hat{k}_i\hat{k}_j - \frac{v_f^2}{c^2}\varepsilon_{ij})E_j = 0 \ . \qquad (14.1.10)$$

Homogen sistem jednačina (14.1.10) ima netrivijalno rešenje ako i samo ako mu je determinanta jednaka nuli, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 - \hat{k}_1^2 - \frac{v_f^2}{v_1^2} & -\hat{k}_1\hat{k}_2 & -\hat{k}_1\hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1\hat{k}_2 & 1 - \hat{k}_2^2 - \frac{v_f^2}{v_2^2} & -\hat{k}_2\hat{k}_3 \\ -\hat{k}_1\hat{k}_3 & -\hat{k}_2\hat{k}_3 & 1 - \hat{k}_3^2 - \frac{v_f^2}{v_3^2} \end{vmatrix} = 0 \ . \qquad (14.1.11)$$

Uveli smo oznake $v_i = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_i}}$. Razvijanjem determinante dobijamo

$$\frac{\hat{k}_1^2 v_1^2}{v_1^2 - v_f^2} + \frac{\hat{k}_2^2 v_2^2}{v_2^2 - v_f^2} + \frac{\hat{k}_3^2 v_3^2}{v_3^2 - v_f^2} = 1 \ .$$

Ako dalje, sa desne strane iskoristimo $1 = \hat{k}_1^2 + \hat{k}_2^2 + \hat{k}_3^2$, dolazimo do

$$\frac{\hat{k}_1^2}{v_1^2 - v_f^2} + \frac{\hat{k}_2^2}{v_2^2 - v_f^2} + \frac{\hat{k}_3^2}{v_3^2 - v_f^2} = 0 \ , \qquad (14.1.12)$$

odnosno

$$\hat{k}_1^2\left(v_f^2 - v_2^2\right)\left(v_f^2 - v_3^2\right) + \hat{k}_2^2\left(v_f^2 - v_1^2\right)\left(v_f^2 - v_3^2\right) + \hat{k}_3^2\left(v_f^2 - v_1^2\right)\left(v_f^2 - v_2^2\right) = 0 \ . \qquad (14.1.13)$$

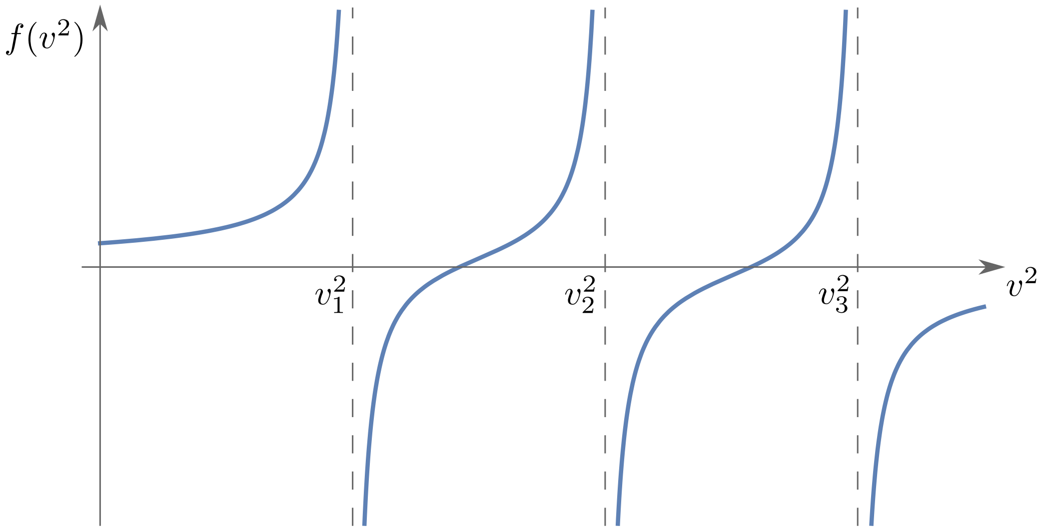
Jednačina (14.1.12), odnosno (14.1.13) je Frenelova jednačina kristalooptike. Ona omogućava da se odrede fazne brzine ravnog monohromatskog talasa koji se prostire duž zadatog pravca. Vidimo da je ova jednačina bikvadratna po faznoj brzini talasa odnosno kvadratna po v_f^2. Funkcija

$$f(v^2) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\hat{k}_i^2}{v_i^2 - v^2}$$

ima oblik kao na slici (14.2). Jasno je da ona ima najviše dve nule. Svakom pravcu $\mathbf{k}$ odgovaraju dva rešenja Frenelove jednačine: v_{f1}, v_{f2}. To znači da se duž svakog pravca u kristalu mogu prostirati najviše dva nezavisna ravna monohromatska talasa. Pravci duž kojih se fazne brzine talasa poklapaju nazivaju se optičkim osama kristala. Može ih biti najviše dve. Kristali sa jednom optičkom osom nazivaju se jednoosnim, a oni sa dve optičke ose su dvoosni.

Kod jednoosnih kristala dve svojstvene vrednosti dielektrične propustljivosti se poklapaju, tj. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\perp$ i $\varepsilon_3 = \varepsilon_\parallel$. Ako uzmemo da je

$$\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$$



Slika 14.2: Funkcija $f(v^2)$.

Frenelova jednačina za jednoosne kristale je

$$\left[v_f^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_\perp}\right]\left[\left(v_f^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_\parallel}\right)\sin^2\theta + \left(v_f^2 - \frac{c^2}{\varepsilon_\perp}\right)\cos^2\theta\right] = 0 \ , \tag{14.1.14}$$

gde je θ ugao izmedju z-ose i talasnog vektora ravnog monohromatskog talasa. Gornja jednačina daje dva rešenja za faznu brzinu talasa. Prvo je

$$v_{f1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}} \tag{14.1.15}$$

dok je drugo rešenje

$$v_{f2} = \sqrt{\frac{c^2}{\varepsilon_\parallel}\sin^2\theta + \frac{c^2}{\varepsilon_\perp}\cos^2\theta} \ . \tag{14.1.16}$$

Lako se vidi da se fazne brzine talasa poklapaju za $\theta = 0$, tj. $v_{f1} = v_{f2} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp}}$. Optička osa kristala je $z-$osa. Dakle duž svakog pravca se prostiru dva ravna monohromatska talasa sa različitim faznim brzinama. Indeks prelamanja talasa fazne brzine v_{f1} je

$$n = \frac{c}{v_{f1}} = \sqrt{\varepsilon_\perp} \ . \tag{14.1.17}$$

Ovaj talas se naziva redovnim ili običnim talasom. Indeks prelamanja za ovaj talas je nezavisan od pravca njegovog prostiranja. Za drugi talas indeks prelamanja

$$n = \frac{c}{v_{f2}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\perp\sin^2\theta + \varepsilon_\parallel\cos^2\theta}} \tag{14.1.18}$$

zavisi od pravca prostiranja. Ovakav talas se naziva neredovnim. Kada talas pada iz vakuuma na jednoosni kristal, dolazi do refleksije i prelamanja talasa. Postoje dva prelomljena talasa koji se prostiru u kristalu. Duž svakog pravca u kristalu prostiru se dva talasa različitih indeksa prelamanja. Ovaj efekt se naziva dvojno prelamanje. Jedan talas zadovoljava Snelijusov zakon a drugi ne.

Već smo rekli da su vektori električne i magnetne indukcije ortogonalni na talasni vektor i medjusobno ortogonalni. Sa druge strane vektor jačine električnog polja nije normalan na talasni vektor. Iz tog razloga se vektor **D** koristi za odredjivanje polarizacije talasa u kristalu. Da bismo analizirali polarizaciju talasa prvo ćemo izabrati koordinatni sistem čija je z osa usmerena duž talasnog vektora **k**. U ovim koordinatama tenzor propustljivosti nije dijagonalan. Projektovanjem vektorske jednačine (14.1.7) u ovom koordinatnom sistemu dobijamo

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{v_f^2}{c^2} D_1 \\ E_2 &= \frac{v_f^2}{c^2} D_2 \ , \end{aligned} \tag{14.1.19}$$

dok je z jednačina identitet $0 = 0$. Dalje, iz $\mathbf{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \mathbf{E}$ sledi

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varepsilon_0} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^{-1} & \varepsilon_{12}^{-1} & \varepsilon_{13}^{-1} \\ \varepsilon_{21}^{-1} & \varepsilon_{22}^{-1} & \varepsilon_{23}^{-1} \\ \varepsilon_{31}^{-1} & \varepsilon_{32}^{-1} & \varepsilon_{33}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Odavde dobijamo

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{1a}^{-1} D_a \\ E_2 &= \frac{1}{\varepsilon_0} \varepsilon_{2a}^{-1} D_a \ , \end{aligned} \tag{14.1.20}$$

gde indeks a uzima vrednosti 1 i 2. Zamenom ovih jednačina u (14.1.19) dobijamo sistem homogenih jednačina

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{11}^{-1} - \frac{v_f^2}{c^2}) D_1 + \varepsilon_{12}^{-1} D_2 &= 0 \\ \varepsilon_{21}^{-1} D_1 + (\varepsilon_{22}^{-1} - \frac{v_f^2}{c^2}) D_2 &= 0 \end{aligned} \tag{14.1.21}$$

Matica ε_{ab}^{-1} je simetrična 2 matrica koju možemo dijagonalizovati. Ako sada x i y ose izabremo tako da je matrica ε_{ab}^{-1} dijagonalna. onda gornji sistem jednačina postaje

$$\begin{aligned} (\tilde{\varepsilon}_1^{-1} - \frac{v_f^2}{c^2}) \tilde{D}_1 &= 0 \\ (\tilde{\varepsilon}_2^{-1} - \frac{v_f^2}{c^2}) \tilde{D}_2 &= 0 \ , \end{aligned} \tag{14.1.22}$$

gde smo sa $\tilde{\varepsilon}_a^{-1}$ obeležili svojstvene vrednosi matrice ε_{ab}^{-1}. Iz (14.1.22) je jasno da su fazne brzine talasa date sa

$$v_{fa} = c\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a^{-1}} \ .$$

Za $v_f = v_{f1}$ je $\tilde{D}_1 \neq 0$ i $\tilde{D}_2 = 0$, tj. talas je linearno polarizovan duž pravca $\tilde{x}$. Slično, talas fazne brzine $v_f = v_{f2}$ je polarizovan duž $\tilde{y}$ ose.

Dakle da zaključimo. Duž svakog pravca u prozračnom kristalu prostiru se najviše dva linearno polarizovana talasa sa različitim faznim brzinama.

Primer 1. Neredovan talas prostire se u jednoosnom kristalu pod uglom θ prema optičkoj osi. Odrediti ugao izmedju talasnog vektora $\mathbf{k}$ i električnog polja ravnog monohromatskog talasa, i ugao izmedju smera zraka i optičke ose kristala.
Rešenje: Neka je talasni vektor $\mathbf{k} = k(\sin\theta, 0, \cos\theta)$, tada sistem jednačina (14.1.10) postaje

$$(E_1 \sin\theta + E_3 \cos\theta) \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} = -\frac{v_{f2}}{c^2} \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp E_1 \\ \varepsilon_\perp E_2 \\ \varepsilon_\parallel E_3 \end{pmatrix} \tag{14.1.23}$$

Zamenom fazne brzine neredovnog talasa (14.1.16) u prethodni sistem jednačina dolazimo do

$$E_3 = -\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} E_1 \tan\theta \tag{14.1.24}$$

i $E_2 = 0$. Ugao izmedju $\mathbf{E}$ i talasnog vektora $\mathbf{k}$ obeležićemo sa α. Ako jednačinu (14.1.7) skalarno pomnožimo sa $\mathbf{E}$ dobijamo

$$\cos^2\alpha - 1 = \frac{v_{f2}^2}{c^2} \frac{\varepsilon_\perp E_1^2 + \varepsilon_\parallel E_3^2}{E^2} \ . \tag{14.1.25}$$

Sredjivanjem gornjeg izraza dobijamo

$$\cos^2\alpha = \frac{(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)^2 \cos^2\theta \sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel^2 \cos^2\theta + \varepsilon_\perp^2 \sin^2\theta} \ . \tag{14.1.26}$$

Ugao izmedju Pointingovog vektora, tj. pravca zraka i optičke ose je odredjen sa

$$\cos\theta' = \frac{\mathbf{S}_p \cdot \mathbf{e}_3}{|\mathbf{S}_p|} \ . \tag{14.1.27}$$

Krajnji rezultat je

$$\tan\theta' = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel} \tan\theta \ . \tag{14.1.28}$$

Primer 2. Ravan talas pada iz vakuuma na ravnu površinu jednoosnog kristala. Optička osa kristala je normalna na površinu kristala. Naći pravce redovnog i neredovnog zraka u kristalu. Upadni ugao talasa je θ_0.
Rešenje: Optička osa (z-osa) je normalna na slobodnu površinu kristala. Neka je θ_1 ugao prelomljenog talasa za redovni talas. Zakon prelamanja daje

$$\sin\theta_1 = \sqrt{\varepsilon_\perp} \sin\theta_0 \ . \tag{14.1.29}$$

Za redovan talas pravac zraka se poklapa sa pravcem prostiranja talasa.
Za neredovni talas imamo

$$v_{f2} \sin\theta_0 = c \sin\theta_2 \ , \tag{14.1.30}$$

gde je θ_2 ugao izmedju talasnog vektora neredovnog talasa i $z-$ ose. Iz gornje jednačine dobijamo

$$\tan\theta_2 = \frac{\sin\theta_0\sqrt{\varepsilon_\parallel}}{\sqrt{\varepsilon_\parallel\varepsilon_\perp - \varepsilon_\perp\sin^2\theta_0}} . \tag{14.1.31}$$

Pravac zraka za neredovni talas se dobija pomoću formule iz prethodnnog primera. Rezultat je

$$\tan\theta_2' = \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}}\frac{\sin\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_\parallel - \sin^2\theta_0}} . \tag{14.1.32}$$

14.2 Faradejev efekat

U ovom poglavlju razmotrićemo uticaj spoljašnjeg konstantnog magnetnog polja na dielektrične karakteristike sredine. Neka se neki razredjeni visoko jonizovani gas (plazma) nalazi u spoljašnjem magnetnom polju $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_z$. Jedan od primera ovakve sredine je jonosfera koja se nalazi u spoljašnjem magnetnom polju Zemlje. Tenzor dielektrične propustljivosti sredine ćemo naći na standardni način. Polazimo od jednačine kretanja elektrona

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e(\mathbf{E}_0e^{-i\omega t} + \dot{\mathbf{r}}\times\mathbf{B}_0) . \tag{14.2.33}$$

Kako je elektronski gas sastavljen od slobodnih elektrona to je kvazielastična sila koja deluje na elektrone jednaka nuli. Lorencova sila sadrži dva dela. Jedan potiče od prisustva konstantnog magnetnog polja, a drugi zbog postojanja monohromatskog talasa frekvence ω. Magnetni deo Lorencove sile kojom elektromagnetni talas deluje na elektron smo zanemarili, jer je kretanje elektrona nerelativističko. Takodje zanemarili smo silu trenja koja deluje na elektron. Partikularno rešenje jednačine kretanja tražićemo u obliku $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0e^{-i\omega t}$. Zamenom u jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} \omega^2 x_0 &= \frac{e}{m}E_{0x} - i\omega_c\omega y_0 \\ \omega^2 y_0 &= \frac{e}{m}E_{0y} + i\omega_c\omega x_0 \\ \omega^2 z_0 &= \frac{e}{m}E_{0z} , \end{aligned} \tag{14.2.34}$$

gde je $\omega_c^2 = eB_0/m$ ciklotronska frekvenca. Rešavanjem gornjeg sistema jednačina dobijamo

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{e}{m}\frac{E_{0x} - i\frac{\omega_c}{\omega}E_{0y}}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ y_0 &= \frac{e}{m}\frac{E_{0y} + i\frac{\omega_c}{\omega}E_{0x}}{\omega^2 - \omega_c^2} \\ z_0 &= \frac{e}{m\omega^2}E_{0z} . \end{aligned} \tag{14.2.35}$$

Polarizacija sredine je $\mathbf{P} = -ne\mathbf{r}$, gde je n koncentracija elektrona, odakle dobijamo električnu indukciju $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P} = \varepsilon_0\hat{\varepsilon}\mathbf{E}$. Tenzor električne propustljivosti se dobija iz prethodne jednačine i on je dat sa

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & i\frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)} & 0 \\ -i\frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)} & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \end{pmatrix} , \tag{14.2.36}$$

gde je $\omega_p^2 = e^2 n/(\varepsilon_0 m)$ plazmena frekvenca. Iz tenzora propustljivosti vidimo da u odsustvu spoljnjeg magnetnog polja sredina bi bila izotropna sa dielektričnom propustljivošću

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} . \tag{14.2.37}$$

Prisustvo magnetnog polja dovelo je do anizotropije sredine. Tenzor propustljivosti je hermitska matrica.

Ispitajmo sada prostiranje ravnih monohromatskih talasa u ovoj sredini. To znači da je $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t+i\mathbf{kr}}$, gde je $\mathbf{E}_0$ amplituda talasa frekvence ω i talasnog vektora $\mathbf{k}$. Ostale elektrodinamičke veličine imaju analogan oblik. Maksvelove jednačine za ravne monohromatske talase su

$$\begin{aligned} \mathbf{k}\cdot\mathbf{D} &= 0 \\ \mathbf{k}\cdot\mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{k}\times\mathbf{E} &= \omega\mathbf{B} \\ \mathbf{k}\times\mathbf{B} &= -\varepsilon_0\mu_0\hat{\varepsilon}\omega\mathbf{E} . \end{aligned} \tag{14.2.38}$$

Množenjem treće jednačine vektorski sa $\mathbf{k}$ sa leve strane i primenom četvrte jednačine dobijamo

$$(\mathbf{k}\cdot\mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}\mathbf{E} . \tag{14.2.39}$$

Uzmimo da se talas prostire duž z ose. Ako se frekvenca talasa poklapa sa plazmenom frekvencom, onda je $E_z \neq 0$, a $E_x = E_y = 0$. Prema tome elektromagnetni talas frekvence $\omega = \omega_p$ je longitudinalan. Sa druge strane, ako je $\omega \neq \omega_p$ prva Maksvelov jednačina onda daje $E_3 = 0$, tj. talas je transverzalan. Iz (14.2.39) dobijamo sistem homogenih jednačina

$$\begin{aligned} \Big(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\Big)E_x - i\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_a E_y &= 0 \\ i\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_a E_x + \Big(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_\perp\Big)E_y &= 0 , \end{aligned} \tag{14.2.40}$$

gde smo uveli oznake

$$\varepsilon_\perp = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2-\omega_c^2} \tag{14.2.41}$$

$$\varepsilon_a = i\frac{\omega_p^2\omega_c}{\omega(\omega^2-\omega_c^2)} . \tag{14.2.42}$$

Determinanta gornjeg sistema mora biti jednaka nuli. Iz ovog uslova dobijamo dve disperzione relacije; duž z ose prostiru se dva talasa sa različitim faznim brzinama

$$\begin{aligned} v_{f1} &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp + \varepsilon_a}} \\ v_{f2} &= \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp - \varepsilon_a}} \ . \end{aligned} \tag{14.2.43}$$

Zamenom ovih vrednosti faznih brzina u sistema jednačina dobijamo da za prvi talas važi $E_x = iE_y$ a za drugi $E_x = -iE_y$. Ova dva talasa su kružno polarizovana. Prvi je desno, a drugi levo polarizovan. Indeks prelamanja za prvi talas je

$$n_1 = \frac{c}{v_{f1}} = \sqrt{\varepsilon_\perp + \varepsilon_a} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \omega_c)}} \ , \tag{14.2.44}$$

odnosno

$$n_2 = \frac{c}{v_{f2}} = \sqrt{\varepsilon_\perp - \varepsilon_a} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - \omega_c)}} \tag{14.2.45}$$

za drugi talas. U sredini dolazi do dvojnog prelamanja. Na slici () smo nacrtali zavisnost kvadrata indeksa prelamanja n_1^2 i n_2^2 od frekvence, za slučaj $\omega_p = 2\omega_c$. Nule ovih funkcija su

$$\begin{aligned} \omega_- &= \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \\ \omega_+ &= \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \end{aligned} \tag{14.2.46}$$

Za frekvence veće od ω_+ levo polarizovani talas, odnosno za frekvence veće od ω_- desno polarizovani talas u sredini poropagiraju bez prigušenja. Za $\omega < \omega_-$ talasni vektor desno polarizovanog talasa postaje čisto imaginaran. To se isto dešava kod levo polarizovanog talasa u oblasti $\omega_c < \omega < \omega_+$. U ova dva slučaja dolazi do refleksije upadnog talasa. Za levo polarizovani talas postoji još jedna grana funkcije n_2^2 u kojoj je n_2^2 pozitivno.

Neka ovakva sredina ispunjava prostor $z > 0$. Na graničnu površinu, $z = 0$ ove sredine sa vakuumom normalno pada linearno polarizovan talas. Neposredno uz granicu, za $z = 0$ u sredini talas polarizovan duž y ose je

$$\mathbf{E}(t, z = 0) = E_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} + \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t} \ . \tag{14.2.47}$$

Upadni linerano polarizovan talas napisali smo kao zbir dva cirkularno polarizovana talasa. Propagiranjem kroz sredinu dolazi do dvojnog prelamanja, jer se levo odnosno desno polarizovane komponente prostiru sa različitim faznim brzinama. U sredini električno polje talasa je

$$\mathbf{E}(t, z) = \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\frac{\omega n_1}{c} z} + \frac{E_0}{2} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega t + i\frac{\omega n_2}{c} z} \ . \tag{14.2.48}$$

Pravo električno polje dobijamo uzimanjem realnog dela gornjeg kompleksnog polja. Tako dobijamo

$$\mathbf{E}(t,z) = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega(n_1+n_2)}{2c} z\right) \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega(n_2-n_1)}{2c} z\right) \\ \cos\left(\frac{\omega(n_2-n_1)}{2c} z\right) \end{pmatrix} \ . \tag{14.2.49}$$

Vidimo da je talas na dubini z linearno polarizovan, ali nije polarizovan duž y ose, već duž pravca koji sa y osom zaklapa ugao

$$\theta = \frac{\omega(n_2-n_1)}{2c} z \ . \tag{14.2.50}$$

Došlo je do obrtanja ravni polarizovane svetlosti. Ovo je tzv. Faradejev efekat.

Glava 15

Prostiranje talasa u talasovodu

U ovoj glavi analiziraćemo prostiranje elektromagnetnih talasa u talasovodima. Talasovodi su uske metalne cevi koje služe za prenos visoko-frekventnih elektromagnetnih talasa. Unutrašnjost talasovoda može biti neki dielektrik ili vakuum. Poprečni presek talasovoda je najčešće pravougaonog ili kružnog oblika. Talasovodi imaju ogromnu primenu u mikrotalasnoj tehnici, jer se njima talasi talasne dužine reda metra i manje prenose. Za talase više frekvence, u infracrvenoj oblasti koriste se optička vlakna. Više detalja možete naći u [1].

15.1 Pravougaoni talasovod

Prepostavićemo da su zidovi talasovoda idealni provodnici, tj. pretpostavićemo da je provodnost zidova beskonačno velika. Debljina skin sloja je onda zanemarljiva pa su polja u provodniku jednaka nuli. Odavde sledi da na stranama talasovoda moraju važiti sledeći granični uslovi $\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}\Big|_S = 0$ i $\mathbf{n}\times\mathbf{E}\Big|_S = 0$. Uzećemo da je presek talasovoda u xOy ravani, a da je $z-$osa usmerena duž ivice talasovoda. Polja u talasovodu imaju sledeći oblik

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\mathcal{E}}(x,y)e^{-i\omega t+ik_z z} \\ \mathbf{B}(t,\mathbf{r}) &= \boldsymbol{\mathcal{B}}(x,y)e^{-i\omega t+ik_z z}\ . \end{aligned} \tag{15.1.1}$$

Zamenom ovog rešenja u treću Maksvelovu jednačinu dobijamo

$$\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y} - ik_z\mathcal{E}_y = i\omega\mathcal{B}_x \tag{15.1.2}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x} + ik_z\mathcal{E}_x = i\omega\mathcal{B}_y \tag{15.1.3}$$

$$\frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial\mathcal{E}_x}{\partial y} = i\omega\mathcal{B}_z\ . \tag{15.1.4}$$

Iz jednačina (15.1.2) i (15.1.3) sledi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \frac{\omega}{k_z}\mathcal{B}_y - \frac{i}{k_z}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x} \\ \mathcal{E}_y &= -\frac{\omega}{k_z}\mathcal{B}_x - \frac{i}{k_z}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial y}\ . \end{aligned} \tag{15.1.5}$$

Četvrta Maksvelova jednačina daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} - ik_z\mathcal{B}_y &= -i\frac{\omega}{c^2}\mathcal{E}_x && (15.1.6)\\ -\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} + ik_z\mathcal{B}_x &= -i\frac{\omega}{c^2}\mathcal{E}_y && (15.1.7)\\ \frac{\partial \mathcal{B}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{B}_x}{\partial y} &= -i\frac{\omega}{c^2}\mathcal{E}_z \ . && (15.1.8) \end{aligned}$$

Iz (15.1.6) i (15.1.7) imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= -\frac{\omega}{k_z c^2}\mathcal{E}_y - \frac{i}{k_z}\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x}\\ \mathcal{B}_y &= \frac{\omega}{k_z c^2}\mathcal{E}_x - \frac{i}{k_z}\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} \ . && (15.1.9) \end{aligned}$$

Kombinovanjem (15.1.5) i (15.1.9) dobijamo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_x &= \frac{ik_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial x} + \frac{\omega}{k_z c^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial y}\Big)\\ \mathcal{B}_y &= \frac{ik_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2}\Big(\frac{\partial \mathcal{B}_z}{\partial y} - \frac{\omega}{k_z c^2}\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial x}\Big) \ . && (15.1.10) \end{aligned}$$

Iz jednačina (15.1.10) vidimo da su x i y komponenta magnetne indukcije odredjeni sa z komponentama električnog i magnetnog polja. Slično iz (15.1.5) a primenom (15.1.10) zaključujemo da su x i y komponetne električnog polja odredjene sa z komponentama. Dakle, transverzalne komponente polja (polja u $xOy-$ravni) su odredjene sa longitudinalnim komponentama. Zamenom izraza za $\mathcal{B}_x$ i $\mathcal{B}_y$ u drugu Maksvelovu jednačinu dobijamo dvodimenzionu talasnu jednačinu za $\mathcal{B}_z$:

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)\mathcal{B}_z + \Big(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\Big)\mathcal{B}_z = 0 \ . \qquad (15.1.11)$$

Jednačinu (15.1.11) možemo prepisati u obliku

$$\triangle_T \mathcal{B}_z + \Big(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\Big)\mathcal{B}_z = 0 \ , \qquad (15.1.12)$$

gde je $\triangle_T$ dvodimenzioni Laplasov operator. Analogno, iz prve Maksvelove jednačine dobijamo da $\mathcal{E}_z$ zadovoljava talasnu jednačinu

$$\triangle_T \mathcal{E}_z + \Big(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\Big)\mathcal{E}_z = 0 \ . \qquad (15.1.13)$$

Tangencijalna komponenta električnog polja i normalna komponenta magnetne indukcije na bočnim granicama talasovoda su jednake nuli. Talasne jednačine za z komponente električnog i magnetnog polja su ekvivalentne, ali granični uslovi koje zadovoljavaju ove dve komponete su različiti. To znači da su njihove svojstvene vrednosti različite. Zbog toga rešenja za elektromagnetne talase podelićemo u dve kategorije. Prvi skup rešenja su rešenja kod kojih je električno polje transverzalno, tj. $E_z = 0$. Ove mode se nazivaju transverzalni električni talasi i obeležavaćemo ih sa TE. Drugu grupu modova čine transverzalni magnetni talasi, kod kojih je $B_z = 0$.

Dalje ćemo analizirati pravougani talasovod. Poprečni presek talasovoda je pravouganik, dimenzija $a \times b$. Neka je $x-$osa usmerena duž stranice dužine a, a $y-$osa duž druge stranice pravouganika. Prvo ćemo analizirati TE polje. Na granicama $x = 0$ i $x = a$ talasovoda mora važiti $B_x|_S = 0$, što zamenom u (15.1.10) daje $\frac{\partial B_z}{\partial x}\Big|_S = 0$. Slično možemo zaključiti da iz uslova $B_x|_S = 0$ na graničnim ravnima $y = 0$ i $y = b$ sledi $\frac{\partial B_z}{\partial y}\Big|_S = 0$. Generalno, TE modovi zadovoljavaju granični uslov

$$\frac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0 \ , \tag{15.1.14}$$

gde je $\mathbf{n}$ ort normale granice.

Rešenje jednačine (15.1.11) pretpostavićemo u obliku $\mathcal{B}_z = X(x)Y(y)$. Zamenom u jednačinu (15.1.11) lako se vidi da su rešenja za funkcije X i Y linearna kombinacija sinusa i kosinusa. Granični uslovi izdvajaju sledeće rešenje

$$\mathcal{B}_z = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \ , \tag{15.1.15}$$

gde $n, m \in Z$ i

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \ . \tag{15.1.16}$$

Uvešćemo oznaku

$$\omega_{mn}^2 = c^2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

pa je $\omega^2 = \omega_{mn}^2 + c^2 k_z^2$. Preostale komponete TE modova se lako dobijaju

$$\begin{aligned}
B_x &= -\frac{ik_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2} B_0 \frac{n\pi}{a} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t + ik_z z} && (15.1.17)\\
B_y &= -\frac{ik_z c^2}{\omega^2 - c^2 k_z^2} B_0 \frac{m\pi}{b} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-i\omega t + ik_z z} && (15.1.18)\\
E_x &= \frac{\omega}{k_z} B_y \\
E_y &= -\frac{\omega}{k_z} B_x
\end{aligned} \tag{15.1.19}$$

Kada je $\omega > \omega_{mn}$ onda je k_z realno; moda propagira duž z-ose. U suprotnom, $\omega < \omega_{mn}$, talas se prigušuje. Frekvenca ω_{mn} je granična (cut-off) frekvenca. Grupna brzina se nalazi po definiciji

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_{mn}^2}{\omega^2}} < c \ . \tag{15.1.20}$$

Drugu kategoriju moda čine TM mode, za koje je $B_z = 0$. Granični uslovi su $E_z|_S = 0$. Komponente polja se nalaze slično kao u slučaju TE modova. Rezultat je

$$\begin{aligned}
E_x &= E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)e^{-i\omega t+ik_z z}\\
B_x &= \frac{i\omega}{\omega^2-c^2k_z^2}E_0\frac{m\pi}{b}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right)e^{-i\omega t+ik_z z}\\
B_y &= -\frac{i\omega}{\omega^2-c^2k_z^2}E_0\frac{n\pi}{a}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)e^{-i\omega t+ik_z z}\\
E_x &= \frac{\omega}{k_z}B_y\\
E_y &= -\frac{\omega}{k_z}B_x\ . \qquad (15.1.21)
\end{aligned}$$

15.2 Snaga i disipacija snage u talasovodu

Već smo rekli da talasovodi služe za transport elektromagnetne energije. Zato odredimo Pointingov vektor u talasovodu i to za TE mode. Kako koristimo formalizam kompleksnih polja to je Pointingov vektor dat sa

$$\mathbf{S}_p = \frac{1}{\mu_0}\Re e(\mathbf{E})\times\Re e(\mathbf{B})\ . \qquad (15.2.22)$$

Njegova srednja vrednost duž z pravca je

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S}_p\cdot\mathbf{e}_z\rangle &= \frac{1}{2\mu_0}\Re e(\mathbf{E}\times\mathbf{B}^*)\cdot\mathbf{e}_z\\
&= \frac{\omega}{2\mu_0 k_z}(|B_x|^2+|B_y|^2). \qquad (15.2.23)
\end{aligned}$$

Zamenom izraza (15.1.17) i (15.1.18) dobijamo

$$\langle S_{pz}\rangle = \frac{k_z c^4\omega B_0}{2\mu_0\omega_{mn}^4}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right]\ . \qquad (15.2.24)$$

Srednja snaga koja se prenosi kroz talasovod je fluks $z-$komponente Pointingovog vektora kroz poprečni presek talasovoda. Lako se dobija da je ona data sa

$$\langle P\rangle = \frac{c^4\omega k_z ab B_0^2}{8\mu_0\omega_{mn}^4}\ . \qquad (15.2.25)$$

Ovaj rezultat se odnosi na TE mode.

Provodnost provodnika ma koliko velika nije beskonačna pa polje u provodniku nije jednako nuli. Magnetno polje u provodniku, $\mathbf{B}_c$ zadovoljava difuzionu jednačinu

$$\triangle\mathbf{B}_c = -i\mu_0\mu_c\sigma\omega\frac{\partial\mathbf{B}_c}{\partial t} \qquad (15.2.26)$$

u kvazistacionarnoj aproksimaciji. Na graničnoj površini sa metalom normalna komponenta magnetne indukcije je neprekidna, ali ćemo je u prvoj aproksimaciji zanemariti u provodniku. Tangencijalna komponenta magnetnog polja je nezanemarljiva. Ako sa ξ obeležimo koordinatu normalnu na površinu provodnika i usmerenu ka unutrašnjosti provodnika onda je

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_T e^{-\frac{\xi}{\delta}+\frac{i\xi}{\delta}-i\omega t} \ , \tag{15.2.27}$$

gde je $\mathbf{H}_T$ jačina magnetnog polja na granici metal-vazduh, a δ debljina skin sloja. Ovo je u skladu sa graničnim uslovom $\mathbf{n} \times (\mathbf{H} - \mathbf{H}_c) = 0$. Pretpostavili smo da se polje menja samo sa koordinatom ξ zanemarivši njegovu zavisnost od tangencijalnih koordinata. Ovo znači da je

$$\bigtriangledown = -\mathbf{n}\frac{\partial}{\partial \xi} \ ,$$

gde je ort normale $\mathbf{n}$ usmeren suprotno od ξ ose. Jačina električnog polja u provodniku je

$$\mathbf{E}_c = \frac{1}{\sigma}\Big(- \mathbf{n}\frac{\partial}{\partial \xi} \times \mathbf{H}_c\Big) \tag{15.2.28}$$

odnosno

$$\mathbf{E}_c = (1-i)\sqrt{\frac{\mu\omega\mu_c}{2\sigma}}(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_T)e^{-\frac{\xi}{\delta}+\frac{i\xi}{\delta}-i\omega t} \ . \tag{15.2.29}$$

Srednja vrednost zapreminske gustine omskih gubitaka snage u metalu je

$$q = \frac{1}{2}\sigma \left\langle \Re e(\mathbf{E}_c \cdot \mathbf{E}_c)\right\rangle = \frac{1}{2}\mu_0\mu_c\omega e^{-\frac{2\xi}{\delta}}|\mathbf{H}_T|^2 \ . \tag{15.2.30}$$

Integracijom izraza za q po koordinati ξ u granicama od 0 do beskonačnosti dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}S} = \frac{\mu_0\mu_c\omega\delta}{4}|\mathbf{H}_T|^2 \ . \tag{15.2.31}$$

To je oslobodjena snaga po jedinici površine u metalu. Izračunajmo sada omske gubitke snage po jedinici dužine talasovoda za TE mode. Na bočnoj granici talasovoda $y = 0$ imamo

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\Big|_{y=0} &= \frac{\mu_0\mu_c\omega\delta}{4}\int_0^a \mathrm{d}x|\mathbf{H}_T|^2\Big|_{y=0} \\
&= \frac{\mu_c\omega\delta B_0^2}{4\mu_0}\int_0^a \mathrm{d}x\Big[\frac{k^2c^4}{\omega_{mn}^4}\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2\sin^2\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)+\cos^2\Big(\frac{n\pi x}{a}\Big)\Big] \\
&= \frac{\mu_c\omega\delta B_0^2 a}{8\mu_0}\Big(\frac{k^2c^4}{\omega_{mn}^4}\Big(\frac{n\pi}{a}\Big)^2+1\Big) \ .
\end{aligned} \tag{15.2.32}$$

Na preostale tri strane talasovoda omski gubici se nalaze analogno. Rezultat je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu_c\omega\delta B_0^2}{4\mu_0}\Big(a+b+\frac{k^2c^4\pi^2}{\omega_{mn}^4}\Big(\frac{n^2}{a}+\frac{m^2}{b}\Big)\Big) \ . \tag{15.2.33}$$

Veličina

$$-\frac{1}{2P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} \tag{15.2.34}$$

predstavlja relativan gubitak snage polja na omske gubitke i naziva se koeficijentom prigušenja talasovoda. Za TM mode se ova veličina dobija analogno. Ostavljamo vam za samostalni rad da nadjete koeficijent prigušenja za TM mode u talasovodu.

Glava 16

Rasejanje elektromagnetnih talasa

Ova glava posvećena je rasejanju elektromagntnih talasa. Prvo ćemo definisati presek za rasejanje, a zatim analizirati nekoliko primera rasejanja elektromagnetnih talasa. Naš prilaz je zasnovan na klasičnoj elektrodinamici, tj. kvantne efekte ćemo smatrati zanemarljivim.

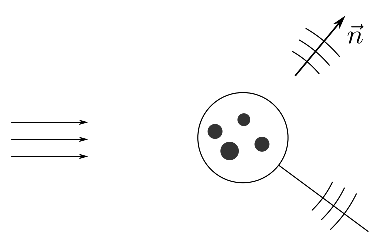
16.1 Presek za rasejanje

Kada elektromagnetni talas pada na metu naelektrisane čestice mete pod dejstvom polja kreću se ubrzano. Ubrzano kretanje čestica mete generiše dopunsko polje, tj. meta emituju sekundarne elektromagnetne talase (slika 16.1). Ovi sekundarni talasi se emituju u svim pravcima tako da se upadni talas rasejava na meti. Rasejanje talasa je odgovor sredine na upadni elektromagnetni talas. Talasi koje emituje meta pružaju značajnu informaciju o samoj meti, što se dosta koristi u spektroskopiji. Neka su dimenzije mete mnogo manje od talasne dužine upadnog zračenja. Ova pretpostavka omogućava da na velikim rastojanjima od mete primenjujemo tehniku razvoja polja po multipolima.

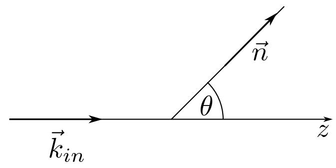
Električno polje upadnog ravnog monohromatskog talasa, frekvence ω i talasnog vektora $\mathbf{k}_{\rm in} = k_{\rm in}\mathbf{e}_3$ je

$$\mathbf{E}_{\rm in} = E_0 \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in} e^{-i(\omega t - \mathbf{k}_{\rm in}\cdot\mathbf{r})} , \tag{16.1.1}$$

gde je E_0 amplituda talasa, a $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}$ vektor polarizacije. Magnetno polje ravnog talasa se dobija iz električnog primenom $c\mathbf{B}_{\rm in} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{E}_{\rm in}$. Na velikim rastojanjima r od mete električno polje je



Slika 16.1:



Slika 16.2: Upadni ravan monohromatski talas duž $z-$ose i rasejani talas pod uglom θ u pravcu orta $\mathbf{n}$.

zbir upadnog i izračenog (rasejanog) talasa, tj.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{in} + \mathbf{E}_{\rm rad} \ . \tag{16.1.2}$$

Električno polje rasejanog talasa je

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Big(\frac{(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n}}{c^2 r} + \frac{\mathbf{n}\times\ddot{\mathbf{m}}}{c^3 r} + \dots\Big) \ . \tag{16.1.3}$$

Vektor $\mathbf{n}$ je pravac propagiranja rasejanog talasa, a $\mathbf{p}$ i $\mathbf{m}$ su električni odnosno magnetni dipolni moment mete. Veličine koje govore o efektima rasejanja talasa su diferencijalni presek za rasejanje i ukupni presek za rasejanje. Diferencijalni presek predstavlja količnik emitovane snage zračenja u pravcu orta $\mathbf{n}$ i snage upadnog zračenja po jedinici površine

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\langle \mathrm{d}P\rangle}{\langle|\mathbf{S}_{p\rm in}|\rangle} = \frac{\langle\mathbf{S}_p\rangle\cdot\mathbf{n}r^2\mathrm{d}\Omega}{\langle|\mathbf{S}_{p\rm in}|\rangle} \ . \tag{16.1.4}$$

Gustinu fluksa snage upadnog talasa i snagu rasejanog talasa smo usrednjili po periodu. Diferencijalni presek meri koji deo snage zračenja se raseje u zadatom pravcu. Presek za rasejeanje se dobija integracijom po uglovima

$$\sigma = \int\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\mathrm{d}\Omega \ . \tag{16.1.5}$$

16.2 Rasejanje na slobodnim elektronima

Najjednostavniji primer rasejanja elektromagnetnih talasa je na slobodnom elektronu. Rekli smo da pretpostavljamo da su dimenzije mete mnogo manje od talasne dužine upadne svetlosti. Ovaj uslov ekvivalentan je tvrdjenju da je kretanje elektrona nerelativističko. Iz tog razloga magnetni deo Lorencove sile koja deluje na elektron je zanemarljiv. Jednačina kretanja slobodnog elektrona koji se nalazi u okolini koordinatnog početka je

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -e\Re e(E_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}) \ . \tag{16.2.6}$$

Drugi izvod električnog dipolnog momenta elektrona je

$$\ddot{\mathbf{p}} = -e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m}E_0\Re e(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}) \ . \tag{16.2.7}$$

Srednja angularna snaga rasejanog elektromagnetnog zračenja i pravcu orta $\mathbf{n}$ je

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\right\rangle &= \frac{1}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3}\left\langle(\ddot{\mathbf{p}}\times\mathbf{n})^2\right\rangle \\ &= \frac{e^4E_0^2}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3 m^2}\left\langle(\Re e(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}}e^{-i\omega t}\times\mathbf{n})^2)\right\rangle \\ &= \frac{e^4E_0^2}{(4\pi)^2\epsilon_0 c^3 m^2}\frac{1}{4}\left\langle(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}}e^{-i\omega t}\times\mathbf{n}+\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\mathrm{in}}e^{i\omega t}\times\mathbf{n})^2\right\rangle \\ &= \frac{e^4E_0^2}{2(4\pi)^2\epsilon_0 c^3 m^2}(1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}}|^2)\ . \qquad (16.2.8)\end{aligned}$$

Srednja vrednost intenziteta Pointingovog vektora upadnog talasa je

$$\langle|\mathbf{S}_{p\mathrm{in}}|\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\ , \qquad (16.2.9)$$

pa je diferencijalni presek dat sa

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\Big)^2(1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}}|^2)\ . \qquad (16.2.10)$$

Izraz u zagradi je klasični radijus elektrona $r_e = 2,8\cdot 10^{-13}$cm. Klasični radijus proton je $r_p = 10^{-16}$cm, tj. za tri reda veličine je manji od klasičnog radijusa elektrona. Rasejanje talasa na protonima je zanemarljivo u poredjenju sa rasejanjem na elektronima.

Vektor $\mathbf{n}$ i talasni vektor upadnog talasa, $\mathbf{k}_{\mathrm{in}} = k_{\mathrm{in}}\mathbf{e}_3$ odredjuju ravan rasejanja. Formula (16.2.10) se može primeniti u slučaju proizvoljne polarizacije upadnog talasa. Ako je polarizacija upadnog talasa duž x ose, $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}} = \mathbf{e}_1$ diferencijalni presek je

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_\perp = \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\Big)^2\ . \qquad (16.2.11)$$

Ako je upadni talas polarizovan duž y ose, tj. $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathrm{in}} = \mathbf{e}_2$ imamo

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_\parallel = \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\Big)^2\cos^2\theta\ . \qquad (16.2.12)$$

Prirodna svetlost je nepolarizovana. Nepolarizovan talas je nekoherentna mešavina dva linearno polarizovana talasa: jednog duž x a drugog duž y ose sa istim intenzitetima. Kada je upadni talas nepolarizovan, presek za rasejanje se dobija usrednjavanjem po ove dve linearno nezavisne polarizacije. Rezultat za nepolarizovan upadni talas je

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\mathrm{nep}} &= \frac{1}{2}\Big(\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_\parallel + \Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_\perp\Big) \\ &= \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\Big)^2\frac{1+\cos^2\theta}{2}\ . \qquad (16.2.13)\end{aligned}$$

Integracijom po uglovima dobijamo presek za rasejanje

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2}\Big)^2 \; . \tag{16.2.14}$$

Gornji rezultat je poznat kao Tomsonova formula. On važi kada je ispunjeno $\hbar\omega \ll mc^2$. U suprotnom slučaju, tj. kada je energija upadnog fotona reda veličine energije mirovanja elektrona moramo da primenjujemo kvantnu elektrodinamiku.

16.3 Rasejanje na vezanim elektronima

Razmatrajmo rasejanje elektromagnetnog talasa na atomskom elektronu. Jednačina kretanja elektrona u okolini koordinatnog početka je

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + m\gamma\dot{\mathbf{r}} + m\omega_0^2\mathbf{r} &= -\frac{eE_0}{2}\Big(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t} + \boldsymbol{\mathcal{E}}^\star_{\rm in}e^{i\omega t}\Big) \\ &= -e\Re e(E_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}) \; , \end{aligned} \tag{16.3.15}$$

gde su ω_0 i γ sopstvena frekvenca i faktor prigušenja elektrona. Uticaj magnetnog polja je zanemarljiv. Partikularno rešenje gornje jednačine je

$$\mathbf{r} = -eE_0\Re e\Big(\frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}}{m(\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma)}\Big) \; . \tag{16.3.16}$$

Dipolni moment elektrona je $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ pa je

$$\ddot{\mathbf{p}} = -\frac{e^2E_0\omega^2}{m}\Re e\Big(\frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\Big) \; . \tag{16.3.17}$$

Angularna distribucija snage rasejanog zračenja u dipolnoj aproksimaciji u pravcu orta $\mathbf{n}$ je

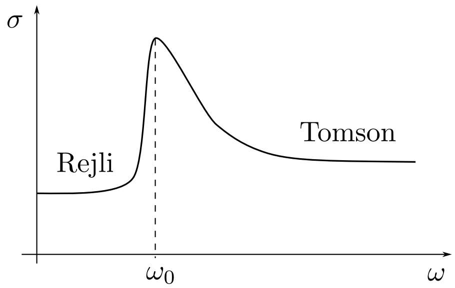
$$\begin{aligned} \Big\langle\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\Big\rangle &= \frac{1}{(4\pi)^2\varepsilon_0c^3}\Big(\frac{e^2E_0\omega^2}{m}\Big)^2\Big\langle\Big(\Re e\frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}\times\mathbf{n}e^{-i\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2-i\omega\gamma}\Big)^2\Big\rangle \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2\varepsilon_0c^3}\Big(\frac{e^2E_0\omega^2}{m}\Big)^2\frac{(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}\times\mathbf{n})\cdot(\boldsymbol{\mathcal{E}}^*_{\rm in}\times\mathbf{n})}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{2(4\pi)^2\varepsilon_0c^3}\Big(\frac{e^2E_0\omega^2}{m}\Big)^2\frac{1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}|^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \; . \end{aligned} \tag{16.3.18}$$

Diferencijalni presek za rasejanje je

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0c^2m}\Big)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}(1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}|^2) \; . \tag{16.3.19}$$

Diferencijalni presek za rasejanje nepolarizovanog elektromagnetnog talasa dobija se usrednjavanjem po polarizacijama upadnog talasa, tj.

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\rm nep} = \Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0c^2m}\Big)^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}\frac{1+\cos^2\theta}{2} \; . \tag{16.3.20}$$



Slika 16.3:

Integracijom po prostornom uglu dobijamo presek za rasejanje

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m}\Big)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \ . \qquad (16.3.21)$$

Gornji rezultat za razliku od Tomsonovog preseka za rasejanje je frekventno zavistan. Ova zavisnost je predstavljena na grafiku 16.3. Sopstvena frekvenca elektrona je u ultravioletnoj oblasti pa je za vidljivu svetlost $\omega \ll \omega_0$. Takodje je $\gamma \ll \omega$ pa se u tom slučaju gornji presek svodi na

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\Big(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 m}\Big)^2 \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \ . \qquad (16.3.22)$$

Ovaj rezultat je poznat kao Rejlijeva formula. Presek za rasejanje je proporcionalan četvrtom stepenu frekvence upadnog talasa. Talasna dužina crvene svetlosti 700nm, a plave 400nm. Prema tome plava svetlost se mnogo više rasejava od crvene, odnosno

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_c} \approx 2^4 \ . \qquad (16.3.23)$$

Kada je $\omega_0 = 0$ i $\gamma = 0$ dobijamo Tomsonov rezultat.

16.4 Plavo nebo

Dielektrična propustljivost vazduha za vidljivu svetlost je

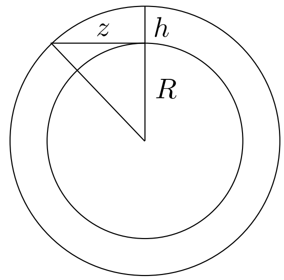
$$\varepsilon = 1 + \sum_s \frac{n_a e^2}{\varepsilon_0 m\omega_s^2} \ , \qquad (16.4.24)$$

gde smo uzeli da je $\omega_s \gg \omega \gg \gamma_s$. U ovoj aproksimaciji dipolni moment atoma je

$$\mathbf{p} = \frac{\varepsilon_0 E_0(\varepsilon-1)}{n_a}\Re e(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in} e^{-i\omega t}) \ . \qquad (16.4.25)$$

Postupajući kao u prephodnom paragrafu dobijamo presek za rasejanje nepolarizovane svetlosti

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\Big)_{\rm nep} = \frac{\omega^4(\varepsilon-1)^2}{(4\pi)^2 c^4 n_a^2}\frac{1+\cos^2\theta}{2} \ . \qquad (16.4.26)$$



Slika 16.4:

Integracija daje presek za rasejanje molekula odnosno atoma

$$\sigma = \frac{\omega^4(\varepsilon - 1)^2}{6\pi c^4 n_a^2} \ . \tag{16.4.27}$$

Presek je proporcionalan četvrtom stepenu frekvence upadnog talasa. Kada vidljiva svetlost pogadja molekule vazduha ona se rasejava na njima i pri svakom sudaru deo snage upadnog talasa se gubi na rasejanje. Taj deo snage je σ, pa upadni fluks posle prolaska kroz sloj vazduha debljine dx izgubi $n_a\sigma \mathrm{d}x$ deo snage. Pretpostavili smo da je zračenje od različitih molekula nekoherentno. Dakle intenzitet zračenja slabi za

$$\mathrm{d}I = -In_a\sigma \mathrm{d}x \tag{16.4.28}$$

odakle dobijamo zakon po kome opada snaga upadnog snopa sa dubinom

$$I = I_0 e^{-n_a\sigma x} \ . \tag{16.4.29}$$

Veličina $\alpha = n_a\sigma$ je koeficijent apsorpcije. Posle prolaska kroz sloj vazduha debljine $\Lambda = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{n_a\sigma}$ intenzitet talasa opadne e puta. Kako je $\varepsilon - 1 = 6 \cdot 10^{-4}$, $n_a = 3 \cdot 10^{25}\frac{1}{\mathrm{m}^3}$ to je $\Lambda = 200$km za crvenu, a $\Lambda = 30$km za plavu svetlost. Kada je Sunce u zenitu mi ne gledamo direktno u Sunce i vidimo rasejanu svetlost. Kako se plava svetlost više rasejava to je nebo plavo. Debljina atmosfere je oko $h = 10$km, slika 16.4. Rastojanje koje svetlost rasejana prelazi je $z = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx \sqrt{Rh} \approx 300$km. Pri zalasku Sunca mi gledamo direktno u Sunce i vidimo transmitovanu svetlost koja je crvena jer se plava rasejala.

16.5 Rasejanje na malim kuglicama

Neka je radijus kuglice a, a njena dielektrična propustljivost $\varepsilon(\omega)$. Kada se ovakva kuglica nalazi u spoljnjem polju konstantnom polju $\mathbf{E}_{\mathrm{in}}$ njen indukovani električni dipolni moment je

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} a^3 \mathbf{E}_{\mathrm{in}} \ . \tag{16.5.30}$$

Slično se može pokazati i sledeće. Ako je μ relativna magnetna propustljivost materijala od koga je napravljena kuglica, onda će njen magnetni dipolni moment biti

$$\mathbf{m} = 4\pi \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \mathbf{H}_{\mathrm{in}} \tag{16.5.31}$$

kad se kuglica nalazi u spoljnem magnetnom polju $\mathbf{H}_{\rm in}$. Nas interesuje rasejanje elektromagnetnog talasa (16.1.1) na kuglici. Dimenzije kuglice su male u odnosu na talasnu dužinu talasa pa ćemo polje u kuglici smatrati homogenim. Pretpostavićemo da je $\mu = 1$, čime ćemo pojednostaviti račun. Dipolni moment kuglice je

$$\mathbf{p} = 4\pi\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}a^3\Re e\Big(\mathbf{E}_0\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}e^{-i\omega t}\Big) \ . \tag{16.5.32}$$

Zamenom ovog izraza u izraz za srednju vrednost angularne distribucije snage zračenja u dipolnoj aparoksimaciji dobijamo

$$\frac{{\rm d}P}{{\rm d}\Omega} = \frac{\varepsilon_0}{2}c^3\Big(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\Big)^2a^6\omega^4E_0^2(1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}|^2) \ . \tag{16.5.33}$$

Diferencijalni presek za rasejanje je

$$\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega} = \frac{a^6\omega^4}{c^4}\Big|\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\Big|^2(1-|\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\rm in}|^2) \ . \tag{16.5.34}$$

Diferencijalni presek za upadni nepolarizovani talas dobija se usrednjavanjem. Rezultat je

$$\Big(\frac{{\rm d}\sigma}{{\rm d}\Omega}\Big)_{\rm nep} = \frac{a^6\omega^4}{2c^4}\Big|\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\Big|^2(1-\cos^2\theta) \ . \tag{16.5.35}$$

Integracijom po uglovima dobijamo totalni presek

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\Big(\frac{\omega}{c}\Big)^4a^6\Big(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\Big)^2 \ . \tag{16.5.36}$$

U limesu $\varepsilon\to\infty$ iz ovog rezultata dobijamo rezultat za rasejenje na metalnoj kuglici. Analogno prethodnom mogu se uključiti i efekti magnetnog dipolnog zračenja ukoliko je $\mu \neq 1$.

16.5.1 Rasejanje na meti sa više centara rasejanja

Do sada smo razmatrali rasejanje ravnog elektromagnetnog talasa na jednoj meti. Sada ćemo pretpostaviti da imamo više rasejivača i da su oni u fiksnim pozicijama. Neka je $\mathbf{r}_\alpha$ radijus vektor rasejivača indeksa α. Jednostavnosti radi pretpostavićemo da su svi rasejivači isti i da su dimenzije rasejivača male u poredjenju sa talasnom dužinom upadnog talasa. Dipolni moment rasejivača indeksa α je proporcionalan sa upadnim poljem $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0e^{-i\omega t+i\mathbf{k}_{\rm in}\cdot\mathbf{r}_\alpha}$. Na velikim rastojanjima od ove složene mete magnetno polje rasejanog talasa je koherentna superpozicija individualnih magnetnih polja od svakog rasejivača ponaosob,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0c^3}\sum_\alpha^N\frac{\ddot{\mathbf{p}}_\alpha(t-\frac{R_\alpha}{c})\times\mathbf{n}_\alpha}{R_\alpha} \ . \tag{16.5.37}$$

Sa R_α obeležili smo rastojanje izmedju rasejivača indeksa α i tačke posmatranja, $\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha/R_\alpha$ je odgovarajući ort. Koordinatni početak je u oblasti složene mete, a $\mathbf{r}$ je vektor položaja tačke posmatranja. Ortove $\mathbf{n}_\alpha$ aproksimiraćemo sa $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Dalje imamo $R_\alpha = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| \approx r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_\alpha$. U imeniocu izraza za magnetno polje R_α ćemo aproksimirati sa r, a u brojicu ćemo zadržati i naredni član. Magnetna indukcija onda postaje

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3} \sum_\alpha^N \frac{-\mathbf{p}_0 \omega^2 e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \times \mathbf{n}}{r} e^{i(\mathbf{k}_{\mathrm{in}} - \mathbf{k})\cdot \mathbf{r}_\alpha} \tag{16.5.38}$$

$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$ je talasni vektor rasejanog elektromagnetnog talasa. Sa $\mathbf{q} = \mathbf{k}_{\mathrm{in}} - \mathbf{k}$ obeležićemo promenu talasnog vektora pri rasejanju. Fazni faktor $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\alpha}$ je jedina razlika koja se pojavljuje u odnosu na slučaj kad imamo samo jedan centar rasejanja. Fazna razlika izmedju različitih rasejivača dovodi do interferencionih efekata. Pomoću izraza za magnetno polje lako se nalazi izračena snaga u pravcu orta $\mathbf{n}$, a pomoću nje dobijamo diferencijalni presek za rasejanje. Rezultat je

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0 \sum_{\alpha,\beta=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)} \ , \tag{16.5.39}$$

gde smo sa $\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_0$ obeležili diferencijalni presek za rasejanje na jednom rasejivaču. Dopunski faktor

$$F = \sum_{\alpha,\beta=1}^N e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}_\beta)} \tag{16.5.40}$$

predstavlja faktor koheretnosti, i pokazuje u kojoj meri se rezultat za rasejanje na više rasejivača razlikuje od rasejanja na jednom. Ako rasejivača ima puno i slučajno su rasporedjeni, faze u sumi izraza (16.5.40) će se pokratiti pa je $F = N$. Rasejanje je u ovom slučaju nekoherentni zbir rasejanja na pojedinačnim rasejivačima. Suprotan slučaj je kad su rasejivači pravilno rasporedjeni, npr. kao u kristalima. Ako duž jedne linije imamo rasejivače, na medjusobnom rastojanju L onda je

$$\sum_\alpha e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}_\alpha} = \sum_{\alpha=0}^{N-1} e^{i\alpha\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}} = \frac{1 - e^{iN\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}}}{1 - e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}}} \ , \tag{16.5.41}$$

pa je

$$F = \frac{\sin^2\left(\frac{N\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\mathbf{q}\cdot\mathbf{L}}{2}\right)} \ .$$

Funkcija F za vrednosti $\mathbf{q} \cdot \mathbf{q} = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ ima maksimume koji iznose $F = N^2$.

Dodatak A

Vektorska analiza

Divergencija vektorskog polja $\mathbf{A}$ u Dekartovim koordinatama je

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \partial_i A_i \ . \tag{A.0.1}$$

Latiničnim slovima obeležavamo Dekartove koordinate. Parcijalni izvod po koordinati x_i kraće zapisujemo kao ∂_i. Vektorski proizvod dva vektora $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ možemo zapisati preko simbola Levi–Čivita na sledeći način

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} A_j B_k \mathbf{e}_i \ , \tag{A.0.2}$$

gde su $\mathbf{e}_i$ Dekartovi ortovi. Rotor vektorskog polja u Dekartovim koordinatama

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{E} = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \mathbf{e}_i \ . \tag{A.0.3}$$

Vektorski identiteti:

$$\mathrm{div}(\psi\mathbf{A}) = \psi \mathrm{div}\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \bigtriangledown\psi \ , \tag{A.0.4}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\mathrm{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathrm{rot}\mathbf{B} \ , \tag{A.0.5}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathrm{rot}\mathbf{B} + \mathbf{B} \times \mathrm{rot}\mathbf{A} \ , \tag{A.0.6}$$

$$\mathrm{rot}(\psi\mathbf{A}) = \psi \mathrm{rot}\mathbf{A} + \nabla\psi \times \mathbf{A} \ , \tag{A.0.7}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\mathrm{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\mathrm{div}\mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} \ , \tag{A.0.8}$$

$$\mathrm{rotrot}\mathbf{A} = \mathrm{graddiv}\mathbf{A} + \triangle\mathbf{A} \ . \tag{A.0.9}$$

Integralni identiteti:
Gausova teorema

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \mathrm{div}\mathbf{A} = \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{A.0.10}$$

Ako se u Gausovoj teoremi za vektorsko polje izabere $\mathbf{A} = \psi\mathbf{c}$, gde je $\mathbf{c}$ konstantan vektor dobićemo

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \nabla\psi = \oint_{\partial V} \psi \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{A.0.11}$$

Slično, ako se uzme da je $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$, gde je $\mathbf{a}$ vektorsko polje dobija se

$$\int_V \mathrm{d}^3 r \mathrm{rot}\mathbf{a} = \oint_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{S} \times \mathbf{a} \ . \tag{A.0.12}$$

Prvi Grinov identitet

$$\int_V \mathrm{d}^3 r (\nabla\psi \cdot \nabla\chi + \psi\triangle\chi) = \oint_{\partial V} \psi\nabla\chi \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{A.0.13}$$

Drugi Grinov identitet

$$\int_V \mathrm{d}^3 r (\chi\triangle\psi - \psi\triangle\chi) = \oint_{\partial V} (\chi\nabla\psi - \psi\nabla\chi)\mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{A.0.14}$$

Stoksova teorema

$$\int_S \mathrm{rot}\mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} \tag{A.0.15}$$

Iz Stoksove teoreme uzimanjem $\mathbf{A} = \mathbf{c}\psi$, odnosno $\mathbf{A} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ dobijamo identitete

$$\int_S \mathrm{d}\mathbf{S} \times \nabla\psi = \oint_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{r}\psi \ , \tag{A.0.16}$$

$$\int_S \mathrm{d}S_i \nabla a_i - \int_S \mathrm{d}\mathbf{S}\mathrm{div}\mathbf{a} = \oint_{\partial S} \mathrm{d}\mathbf{r} \times \mathbf{a} \tag{A.0.17}$$

Dodatak B

Dirakova delta funkcija

Dirakova δ funkcija je

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0, & x \neq a, \\ \infty, & x = a, \end{cases} \tag{B.0.1}$$

tako da je

$$\int_c^d \delta(x-a)dx = 1, \text{ ako je } c < a < d. \tag{B.0.2}$$

Osobine:

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0), \tag{B.0.3}$$

$$\int_a^b \delta(x-x_1)\delta(x-x_2)dx = \delta(x_1-x_2) \text{ ako je } a < x_1 < b \text{ ili } a < x_2 < b, \tag{B.0.4}$$

$$\delta(-x) = \delta(x), \tag{B.0.5}$$

$$x\delta(x) = 0, \tag{B.0.6}$$

$$|x|\delta(x^2-\epsilon) = \delta(x) \text{ kada } \epsilon \to +0, \tag{B.0.7}$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x), \tag{B.0.8}$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{|f'(x_n)|}\delta(x-x_n), \tag{B.0.9}$$

$$\delta(x^2-a^2) = \frac{1}{2|a|}(\delta(x-a)+\delta(x+a)). \tag{B.0.10}$$

U formulama (3) i (4) funkcija $f(x)$ je neprekidna. Navedene jednakosti treba shvatiti u smislu su integrali leve i desne strane iste jednakosti jednaki. U formuli (B.0.9) x_n $(n = 1, \ldots, N)$ su prosti koreni jednačine $f(x) = 0$, koji pri tom nisu stacionarne tačke diferencijabilne funkcije $f(x)$. Pošto je δ funkcija parna funkcija, iz relacija (2) i (3), pri $a = -b < 0$ i $x_0 = 0$, slede jednakosti:

$$\int_0^b \delta(x)dx = \frac{1}{2}, \tag{B.0.11}$$

$$\int_0^b f(x)\delta(x)dx = \frac{1}{2}f(0). \tag{B.0.12}$$

Integrali koji sadrže izvod δ funkcije izračunavaju se parcijalnom integracijom:

$$\int_a^b f(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx = -\int_a^b f'(x)\delta(x-x_0)dx = -\left(\frac{df(x)}{dx}\right)_{x=x_0}, \tag{B.0.13}$$

gde je $a < x_0 < b$. Važan slučaj ove formule zapisuje se ponekad kao:

$$x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x). \tag{B.0.14}$$

Funkcije skoka (step funkcija) je definisana sa

$$\eta(x-x_0) = \begin{cases} 1, & x > x_0, \\ 0 & x < x_0, \end{cases} \tag{B.0.15}$$

Može se pokazati da je $\delta-$funkcija izvod step funkcije, tj.

$$\delta(x-x_0) = \frac{d}{dx}\eta(x-x_0). \tag{B.0.16}$$

Postoji više analitičkih reprezentacija δ funkcije. Neke od najčešće korišćenih su:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin Lx}{L}, \tag{B.0.17}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{L\to\infty}\frac{\sin^2 Lx}{Lx^2}, \tag{B.0.18}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma}{\gamma^2+x^2}, \tag{B.0.19}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\mu\to\infty}\mu e^{-\mu^2x^2}. \tag{B.0.20}$$

Trodimenzionalna δ funkcija odredjena je relacijom:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) . \tag{B.0.21}$$

Njeno osnovno svojstvo je izraženo jednačinom:

$$\int_V d^3r f(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = f(\mathbf{r}_0) , \tag{B.0.22}$$

pri čemu se tačka sa radijus vektorom $\mathbf{r}_0$ nalazi u oblasti V, a $f(\mathbf{r})$ je neprekidna funkcija definisana u toj oblasti. Ako se pomenuta tačka nalazi van oblasti V, onda je integral u (23) jednak nuli. Nekada je korisno trodimenzionalnu δ funkciju predstaviti i kao trostruki integral u beskonačnom $\mathbf{k}$ prostoru:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} . \tag{B.0.23}$$

Trodimenzionalna δ funkcija zadovoljava relaciju:

$$\triangle \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \ . \tag{B.0.24}$$

U proizvoljnim ortogonalnim krivolinijskim koordinatama (ξ, η, ζ) trodimenzionalna δ funkcija se zapisuje kao:

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \frac{1}{|J|}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)\delta(\zeta-\zeta_0), \tag{B.0.25}$$

gde je $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$, $\mathbf{r}_0 = (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, a $|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}\right|$ jakobijan odgovarajuće transformacije.

Dodatak C

Ležandrovi polinomi i sferni harmonici

Ležandrovi polinomi, $P_n(x),\ n = 0, 1, \ldots$ su rešenja difrencijalne jednačine:

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_n}{dx^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x} + n(n+1)P_n = 0, \tag{C.0.1}$$

gde je $-1 \leq x \leq 1$.
Rodrigova formula:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{C.0.2}$$

Prvih nekoliko polinoma su:

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1),\ \ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x). \tag{C.0.3}$$

Generatrisa Ležandrovih polinoma:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x), \quad t < 1\ . \tag{C.0.4}$$

Relacije ortonormiranosti:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}, \tag{C.0.5}$$

Osobine Ležandrovih polinoma:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x), \tag{C.0.6}$$

$$P_n(1) = 1, \tag{C.0.7}$$

$$P_{2k+1}(0) = 0,\ \ P_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}, \tag{C.0.8}$$

$$\int_0^1 P_{2k+1}(x)dx = \frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!},\ \ \int_0^1 P_{2k}(x)dx = \delta_{k,0}. \tag{C.0.9}$$

Ako su m i n istovremeno parni ili neparni onda važi:

$$\int_0^1 P_n(x)P_m(x)dx = \frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}. \tag{C.0.10}$$

Rekurentne relacije:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \tag{C.0.11}$$

$$(x^2-1)P_n'(x) = nxP_n(x) - nP_{n-1}(x), \tag{C.0.12}$$

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x). \tag{C.0.13}$$

Na intervalu $[-1,1]$ Ležandrovi polinomi čine bazis, odnosno oni su potpuni skup ortogonalnih funkcija, tako da se proizvoljna neprekidna funkcija na tom intervalu može razviti u red po Ležandrovim polinomima:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{C.0.14}$$

gde je:

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x) \tag{C.0.15}$$

Generalisani Ležandrovi polinomi, $P_l^m(x)$ zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x} - 2x\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0\ . \tag{C.0.16}$$

Sferni harmonici

Sferni harmonici su definisani sa

$$Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}, \tag{C.0.17}$$

gde je $-l \leq m \leq l$, $l = 0,1,2,...$, dok su $P_l^m(\cos\theta)$ generalisani Ležandrovi polinomi. Generalisani Ležandrovi polinomi dati su sa:

$$P_l^m(\cos\theta) = \sin^m\theta\frac{\mathrm{d}^m P_l(\cos\theta)}{(\mathrm{d}\cos\theta)^m}. \tag{C.0.18}$$

Prvih nekoliko sfernih harmonika:

$$\begin{aligned}
Y_{00}(\theta,\varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad (C.0.19)\\
Y_{10}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_{11}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\varphi},\\
Y_{20}(\theta,\varphi) &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(1-3\cos^2\theta), \quad Y_{21}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\cos\theta\sin\theta e^{i\varphi},\\
Y_{22}(\theta,\varphi) &= -\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{2i\varphi}.
\end{aligned}$$

Za negativne vrednosti m koristimo

$$Y_{l,-m}(\theta,\varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta,\varphi) \ .$$

Sfreni harmonici su ograničena rešenja diferencijalne jednachine:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dY_l^m}{d\theta}\right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)Y_l^m = 0. \tag{C.0.20}$$

Pri tome je dejstvo Laplasovog operatora na sferne harmonike:

$$\triangle Y_l^m(\theta,\phi) = -\frac{l(l+1)}{r^2}Y_l^m(\theta,\phi), \tag{C.0.21}$$

za $r \neq 0$.

Relacije ortogonalnosti:

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi)\sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{C.0.22}$$

Relacije kompletnosti:

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^\star(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) = \delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\theta-\cos\theta') \ . \tag{C.0.23}$$

Dve osobine sfernih harmonika Y_{l0}:

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta,\varphi)d\varphi = 2\pi\delta_{0m}Y_{l0}(\theta,\varphi), \tag{C.0.24}$$

$$\int_0^{2\pi} Y_{lm}^*(\theta,\varphi)Y_{l'm'}(\theta,\varphi)d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}Y_{l0}^*(\theta,\varphi)Y_{l'0}(\theta,\varphi). \tag{C.0.25}$$

Neka su koordinate vektora $\mathbf{r}$ i $\mathbf{r}'$ date sa (r,θ,φ), odnosno (r',θ',φ'). Ugao izmedju ova dva vektora obeležićemo sa γ. Adicioni teorem je dat sa

$$P_l(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \ . \tag{C.0.26}$$

Primenom adicionog teorema dobijamo sledeću, veoma korisnu formulu

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}Y_{lm}^*(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi) \ . \tag{C.0.27}$$

Dodatak D

Beselove funkcije

Beselova diferencijalna jednačina, reda ν:

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)R=0. \tag{D.0.1}$$

Beselove funkcije reda $\pm\nu$:

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(j+\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \tag{D.0.2}$$

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j!(j-\nu)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2j}. \tag{D.0.3}$$

Kada je parametar ν ceo broj, tj. $\nu=n$ važi $J_{-n}(x)=(-1)^nJ_n(x)$.

Nojmanova funkcija $N_\nu(x)$ (ili Beselova funkcija druge vrste)je data sa

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu\cos(\nu\pi)-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}. \tag{D.0.4}$$

Beselove funkcije treće vrste ili Hankelove funkcije definisane su kao:

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x)+iN_\nu(x), \tag{D.0.5}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x)-iN_\nu(x). \tag{D.0.6}$$

Rekurentne veze:

$$\Omega_{\nu-1}+\Omega_{\nu+1} = \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu, \tag{D.0.7}$$

$$\Omega_{\nu-1}-\Omega_{\nu+1} = 2\frac{d\Omega_\nu}{dx}, \tag{D.0.8}$$

$$\frac{d\Omega_0(x)}{dx} = -\Omega_1(x), \tag{D.0.9}$$

$$\int_0^x z\Omega_0(z)dz = x\Omega_1(x). \tag{D.0.10}$$

gde je $\Omega_\nu = \{J_\nu, N_\nu, H_\nu\}$. O

Asimptotika:
Kada je argument funkcije $x \ll 1$ imamo:

$$J_\nu(x) \to \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \tag{D.0.11}$$

$$N_\nu(x) \to \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{x}{2} + 0,5772 + \dots\right), & \nu = 0 \\ -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu, & \nu \neq 0. \end{cases} \tag{D.0.12}$$

Za $x \gg 1$ imamo:

$$J_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}), \tag{D.0.13}$$

$$N_\nu(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}). \tag{D.0.14}$$

Nule Beselove funkcije ν-tog reda obeležićemo sa $x_{\nu n}$. Beselove funkcije $J_\nu(\frac{x_{\nu n}\rho}{a})$, za fiksno ν, čine ortogonalan skup funkcija na intervalu $0 \leq \rho \leq a$,

$$\int_0^a d\rho\rho J_\nu(\frac{x_{\nu n}\rho}{a}) J_\nu(\frac{x_{\nu n'}\rho}{a}) = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(x_{\nu n})]^2 \delta_{nn'} \ . \tag{D.0.15}$$

Proizvoljnu funkciju $f(\rho)$ $(0 \leq \rho \leq a)$ možemo razviti u Furije-Beselov red:

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{\nu n} J_\nu \left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \ , \tag{D.0.16}$$

gde je

$$A_{\nu n} = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^a d\rho\rho f(\rho) J_\nu \left(x_{\nu n}\frac{\rho}{a}\right) \ . \tag{D.0.17}$$

Funkciju $f(\rho)$ neprekidnuu na intervalu $0 < \rho < \infty$ možemo razložiti u Furije-Beselov integral

$$f(\rho) = \int_0^\infty c_\lambda J_\nu(\lambda\rho)\lambda d\lambda, \tag{D.0.18}$$

gde je ν proizvoljan ceo broj. Koeficijente c_λ odredjujemo koristeći relacije ortogonalnosti

$$\int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho) J_\nu(\lambda'\rho)\rho d\rho = \frac{1}{\lambda}\delta(\lambda' - \lambda). \tag{D.0.19}$$

Diferencijalna jednačina

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0, \tag{D.0.20}$$

naziva se modifikovanom Beselovom jednačinom. Njena rešenja su modifikovane Beselove funkcije $I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix)$ i $K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix)$. One su linearno nezavisna rešenja jednačine (D.0.20).

Literatura

[1] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, John Wiley and Sons, Inc. (1999)

[2] L. Landau, E. Lifšic, Teorija polja, Mir Moskva (1984)

[3] L. Landau, E. Lifšic, Elektrodinamika neprekidnih sredina, Mir Moskva (1984)

[4] B. Milić, Meksvelova Elektrodinamika, Univerzitet u Beogradu, (1996)

[5] W. Greiner, Classical Electrodynamics, Springer, (1996)

[6] A. Zangwill, Modern Electrodynamics, CUP, (2012)

[7] L. Eyges, The Classical Electromagnetic Field, Dover Publication, (1972)

[8] W. Nolting, Theoretical Physics 3, Electrodynamics, Springer, Heidlberg (2016)

[9] V. Radovanović, Specijalna teorija relativnosti, skripte, Fizički fakultet

[10] V. Radovanović, Teorijska mehanika, skripte, Fizički fakultet

[11] V. Radovanović, Problem Book in Quantum Field Theory, Springer, Berlin,2006, second edition 2008